

Inhaltsverzeichnis

1	Geometrische Optik	4
1.1	Geometrische Optik	4
1.2	Optische Abbildung	5
1.3	Linsen	5
1.3.1	Einzelne gekrümmte Fläche	5
1.3.2	Dünne Linsen	5
1.3.3	Dicke Linsen	6
1.3.4	Linsensysteme	6
1.4	Abbildungsfehler	6
1.4.1	Bildfehler 3. Ordnung (Kleinwinkel- oder paraxiale Näherung) . .	6
1.4.2	Bildfehler 2. Ordnung (chromatische Abberation)	7
2	Beugung und Interferenz	7
2.1	Kohärenz	7
2.2	Zweistrahlinterferenz	8
2.2.1	Young'scher Doppelspalt	8
2.2.2	Doppelspalt mit ausgedehnter Quelle	8
2.2.3	Interferenz an planparalleler Platte (Pohl'scher Versuch)	9
2.3	Michelson-Interferometer	9
2.3.1	Michelson-Morley-Experiment: Konstante Lichtgeschwindigkeit . .	10
2.4	Vielstrahl-Interferenz und FPI	10
2.4.1	Fabry-Pérot-Interferometer (FPI)	11
2.4.2	Finesse	12
2.5	Beugung am Einzelspalt	12
2.5.1	Einzelspalt	13
2.5.2	Rayleigh-Kriterium	14
2.6	Interferenz von N Spalten (Gitter)	15
2.6.1	Reflexionsgitter	16
2.7	Fresnelsche Zonen	17
2.8	Fresnel-Beugung und Fraunhofer-Beugung	18
2.9	Polarisation	20
2.9.1	Polarisation bei Brechung und Reflexion	20
2.9.2	Versuch: Brewster-Pyramide	21
2.9.3	Doppelbrechung	21
3	Thermische Strahlung und Photonen	22
3.1	Einführung	22
3.1.1	Lambert-Strahler	22
3.1.2	Spektrale Strahlungsdichte	23
3.2	Kirchhoffsches Strahlungsgesetz	23
3.3	Hohlraumstrahlung	24
3.3.1	Moden im Hohlraumresonator und Energiedichte	25

3.3.2	Rayleigh-Jeans-Strahlungsformel	26
3.4	Planck'sche Strahlungsformel	27
3.4.1	Wien'sches Verschiebungsgesetz	28
3.5	Stefan-Boltzmann-Strahlungsformel	29
3.6	Photoeffekt	29
3.7	Compton-Effekt	30
3.8	Photonen	31
3.8.1	Spin	32
3.9	Einstein'scher Ansatz für Planck'sche Strahlungsformel	32
4	Laser	34
4.1	Schematischer Aufbau	34
4.2	Ratengleichung und Laserbedingung	35
4.3	Dynamik	36
4.4	Aufbau von Lasern	37
5	Elektronenphysik	38
5.1	Einführung	38
5.1.1	Verhältnis $\frac{e}{m}$ beim Elektron: Thomson	38
5.2	Ladung des Elektrons (Millikan)	39
5.3	Feldemission (Feldemissionsmikroskop)	40
5.4	Elektronenbeugung	41
5.5	Materiewellen	41
5.5.1	Heisenberg'sche Unschärferelation	44
6	Quantenstruktur der Atome	45
6.0.2	Lenard-Röhre	45
6.0.3	Franck-Hertz-Versuch	45
6.1	Das Wasserstoff-Atom	46
6.2	Bohr'sche Postulate	47
6.2.1	Bohr-Sommerfeldsches Atommodell	50
6.3	Quantentheorie	50
6.3.1	Anwendungen der Schrödingergleichung	51
6.3.2	Operatoren	52
6.4	Lösungen der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom	53
6.5	Normaler Zeeman-Effekt	53
6.6	Relativistische Korrektur	56
6.7	Elektronenspin	56
6.7.1	Einstein-de Haas-Effekt	57
6.8	Drehimpulse im Atom	58
6.9	Feinstruktur und Spin-Bahn-Kopplung	58
6.10	Hyperfeinstruktur	61
6.11	Anomaler Zeeman-Effekt und Paschen-Back-Effekt	63
6.11.1	Paschen-Back-Effekt	64

6.12	Übergangswahrscheinlichkeiten und Auswahlregeln	64
6.13	Lamb-Verschiebung	64
7	Atome mit mehreren Elektronen	64
7.1	Das Helium-Atom	64
7.2	Symmetrie der Wellenfunktionen	65
7.3	Aufbau der Elektronenhülle größerer Atome	65
8	Verschiedenes	65
8.1	Verständnisfragen der Übung	65
8.2	Relevante Versuche	69
9	Formeln und Konstanten	70
9.1	Formeln	70
9.2	Konstanten	76
10	Prüfungsprotokolle	77
10.1	Verschiedenes	77
10.2	Optik	77
10.3	Interferenz und Beugung	77
10.4	Strahler	78
10.5	Laser	78
10.6	Atome und Quantenmechanik	78

1 Geometrische Optik

Was ist Licht?

Licht ist eine elektromagnetische Welle, Lösung der Wellengleichung.

Wichtige Größen: **Wellenlänge** λ [m] und **Wellenvektor** \vec{k} [1/m] (Phase pro Meter),
 $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

\vec{k} steht senkrecht auf den Phasenflächen und ist in isotropen Medien parallel zum Poynting-Vektor. Dies wird **Lichtstrahl** genannt.

1.1 Geometrische Optik

Was ist die geometrische Optik?

Die geometrische Optik fasst Lichtwellen als **Lichtbündel/Lichtstrahlen** auf und vernachlässigt die Welleneigenschaften wie Beugung. Die geometrische Optik ist eine gute Näherung für Lichtbündel mit Dicke $d \gg \lambda$.

Warum klappt die Näherung?

Beugungseffekte sind erst messbar, wenn die beugenden Strukturen in der Größenordnung der Wellenlänge sind. Tatsächlich ist der gesamte Raum nach dem Huygensschen Prinzip von Wellen geflutet, aber alle Teilwellen bis auf den direkten Strahl haben einen destruktiven Interferenzpartner.

Was sind die Axiome der geometrischen Optik?

Die geometrische Optik hat drei **Axiome**:

1. In optisch homogenen Medien (Brechungsindex n konstant) sind Lichtstrahlen Geraden (Fermatsches Prinzip der minimalen Lichtlaufzeit).
2. Beim Auftreffen auf eine Grenzfläche werden die Strahlen reflektiert ($\alpha' = \alpha$) und nach dem Snellius-Gesetz gebrochen

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Der Winkel ist im optisch dichteren Medium kleiner.

3. Strahlen überlagern sich ohne gegenseitige Beeinflussung (Superposition wie bei Wellen).

Verschiedene Brechungsindizes:

- Vakuum 1
- Luft 1
- Wasser $\frac{4}{3}$
- Glas $\frac{3}{2}$

1.2 Optische Abbildung

Virtuelle Bilder sind Bilder, die sich nicht auf einen Schirm projizieren lassen. Vom virtuellen Bildpunkt gehen keine Lichtstrahlen aus. **Reelle Bilder** lassen sich auf die Ebene projizieren.

Sphärische Hohlspiegel fokussieren alle zur Achse parallelen Strahlen mit dem gleichen Achsenabstand auf einen Punkt. Ein Kugelspiegel ist nur bei Nutzung der paraxialen Näherung sinnvoll. Dann ist der Brennpunkt $f = \frac{R}{2}$.

Parabol-Spiegel fokussieren alle zur Achse parallelen Strahlen auf einen Punkt. Der Brennpunkt ist $f = \frac{y^2}{4x}$.

Was ist die paraxiale Näherung? Es werden nur Strahlen berücksichtigt, die nahe der **optischen Symmetrieachse** sind und parallel zu ihr laufen. Dies ist bei kugelförmigen Hohlspiegeln notwendig, aber auch bei sphärischen Linsen.

Was ist der Brennpunkt? Im Brennpunkt schneiden sich alle Strahlen, die durch Brechung aus achsenparallelen Strahlen hervorgehen.

1.3 Linsen

1.3.1 Einzelne gekrümmte Fläche

Bei paraxialer Näherung gilt an Linsenoberflächen auch die Kleinwinkelnäherung:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$$

Dann ist die Brennweite

$$f = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} R = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R.$$

Für beide Seiten der Linse müssen mehrere Brechungen mit Brennweiten f_1, f_2 berücksichtigt werden.

1.3.2 Dünne Linsen

Näherung für dünne Linsen mit Dicke $d \ll f_1, f_2$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

In die Gleichung $b = f$ und $a = \infty$ einsetzen für den Brennpunkt abhängig von n und R_i :

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Also folgt die Abbildungsgleichung dünner Linsen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Für $R_1 = -R_2$ ist

$$f = \frac{1}{n-1} \left(\frac{R}{2} \right).$$

oder (Newtonsche Abbildungsgleichung)

$$f^2 = x_a x_b$$

für $x_a = a - f$, $x_b = b - f$. Nur sinnvoll für reelle Bilder ($a, b > f$).

1.3.3 Dicke Linsen

Die Hauptebenen liegen nicht mehr aufeinander wie bei der dünnen Linse. Die Hauptebenen H_1, H_2 werden so konstruiert, dass Lichtstrahlen dazwischen nur parallel zur optischen Achse laufen müssen. Man braucht nur die Ränder zu betrachten und erhält dann wieder die Gleichungen der dünnen Linse.

1.3.4 Linsensysteme

Für mehrere Linsen hintereinander addieren sich die **Brechkräfte**, wenn die Linsen nahe aneinanderstehen (Abstand $d \ll f_1, f_2$)

Brechkraft $D^* = \frac{1}{f}$ (Dioptrien dp)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \dots + \frac{1}{f_n}$$

Allgemein:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2}$$

1.4 Abbildungsfehler

1.4.1 Bildfehler 3. Ordnung (Kleinwinkel- oder paraxiale Näherung)

Sphärische Abberation Wie beim sphärischen Spiegel ist die Brennweite vom Abstand zur optischen Achse abhängig. Behebung durch schmale Blenden (Intensitätsverlust) oder nichtsphärische Linsen (aufwendiger).

Koma Die Koma entsteht beim Einfallen von Strahlen, die nicht parallel zur Achse sind und zeigt verwischte Spuren des Bildes zum Rand der Abbildungsebene hin. Schräge Strahlen entstehen, wenn die Linse schräg steht oder der Gegenstand nicht auf der optischen Achse liegt.

Astigmatismus Treffen Lichtstrahlen nicht im Zentrum der Linse auf, so sind die vertikale und die horizontale Krümmung der Oberfläche verschieden. Die Foki für Ausdehnungen in verschiedene Richtungen liegen dann nicht im selben Punkt.

Verzeichnung Vergrößerung ist abhängig vom Abstand des Gegenstands zur optischen Achse. Kissenförmig: Vergrößerung am Rand höher (etwa durch Blende hinter der Linse). Tonnenförmig: Vergrößerung am Rand kleiner (etwa durch Blende vor der Linse).

Bildfeldwölbung Punkte auf einer Ebene, die vor der Linse steht, werden hinter der Linse in eine gewölbte Kugel abgebildet (wie bei der Netzhaut). Beim ebenen Schirm liegt deshalb das projizierte Bild am Rand etwas vor dem Schirm.

Eine **aplanatische Abbildung** ist eine Abbildung ohne sphärische Abberation. Sie genügt der **Abbe'schen Sinusbedingung**:

$$\frac{\theta_G}{\theta_B} = \frac{B}{A} = M = \text{const.}$$

1.4.2 Bildfehler 2. Ordnung (chromatische Abberation)

Der Brechungsindex n hängt i.A. von der Wellenlänge λ ab: $n = n(\lambda)$. Bei Glas ist er für hohe Frequenzen höher, der Fokus f damit kleiner. Blau wird also stärker gebrochen als rot. Ein Achromat gleicht die chromatische Abberation für zwei Wellenlängen aus, für drei ist es schwieriger.

2 Beugung und Interferenz

Was ist das Superpositionsprinzip?

Die Wellengleichung lautet

$$\text{div grad } \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Sie ist linear, d.h. Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen. Die Folge ist, dass sich die Welle an einem Punkt im Raum aus allen Teilwellen in diesem Punkt ergibt.

2.1 Kohärenz

Damit sich bei der Überlagerung von Wellen ein stationäres Interferenzmuster herausbildet, müssen die Teilwellen zueinander kohärent sein.

Zwei Wellen heißen perfekt kohärent, wenn sie eine konstante Phasendifferenz haben.

Soll eine Welle mit einer **zeitlich verschobenen** Kopie ihrer selbst interferieren (Michelson-Interferometer), so muss zeitliche Kohärenz zwischen den Wellen herrschen.

Soll eine Welle mit einer **räumlich verschobenen** Kopie ihrer selbst interferieren (Young'scher Doppelspalt), so muss räumliche Kohärenz herrschen.

Zeitliche Kohärenz Betrachtet man zwei Wellen in einem Punkt, so haben beide Wellen in diesem Punkt eine bestimmte Phase. Ist die Differenz der Phasen konstant über

die Zeit, so sind sie zeitlich kohärent. Absolut konstant ist die Differenz nie, da Licht immer nur in endlichen Wellenzügen ausgesendet werden kann und ein endlicher Wellenzug mehrere Frequenzen hat (Fourier-Transformation). Mit der Zeit ändert sich also der Phasenunterschied. Die Kohärenzzeit t_c ist die Zeit, in der sich die Phasendifferenz um 2π geändert hat. Für eine spektrale Breite von $\Delta\nu$ ist $t_c = \frac{1}{\Delta\nu}$. Die Kohärenzlänge s_c ist die während t_c zurückgelegte Strecke. Sie ist bei weißem Licht im μm -Bereich, bei Lasern im km-Bereich. Der Gangunterschied zweier interferierender Wellen darf höchstens die Kohärenzlänge sein, damit stationäre Interferenzmuster beobachtet werden können.

Räumliche Kohärenz Die räumliche Kohärenz hat nichts mit der Kohärenzlänge zu tun. Sie ist gegeben, wenn Wellen im gesamten Querschnitts eines Lichtbündels eine konstante Phasenbeziehung haben. Dies ist bei ebenen Wellen der Fall und damit auch bei punktförmigen oder unendlich weit entfernten Lichtquellen. Diese können mit Blenden simuliert werden. Die Fläche der Punkte, an denen die Phasen eine konstante Differenz haben, heißt **Kohärenzfläche**.

2.2 Zweistrahinterferenz

2.2.1 Young'scher Doppelspalt

Wird eine ebene Welle (weit entfernte Quelle oder hinter Blende) durch einen Doppelspalt geleitet, so überlagern sich dahinter die beiden entstehenden Teilwellen und laufen in alle Richtungen. Je nach Winkel θ der Richtung besteht ein Gangunterschied Δs und damit Phasenunterschied $\Delta\varphi$, der vom Spaltabstand d abhängt:

$$\Delta s = d \sin \theta$$

$$\Delta\varphi = k\Delta s = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda}$$

Für $\Delta s > s_c$ treten keine Interferenzmuster mehr auf.

Für $\Delta s = m \cdot \lambda$ erscheinen Maxima, für $\Delta s = (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$ Minima.

2.2.2 Doppelspalt mit ausgedehnter Quelle

Eine ausgedehnte Lichtquelle mit Breite b sendet von vielen Punkten Licht aus, die Punkte sind untereinander nicht phasengekoppelt. Für Interferenz ist man also darauf angewiesen, dass das Licht eines beliebigen Punktes gleichzeitig in die beiden Spalte $\pm \frac{d}{2}$ fällt. Zu den beiden Spalten ist aber nur vom Mittelpunkt der Quelle aus der gleiche Weg D , Punkte mit Abstand zur Mitte senden ihr Licht zeitlich verzögert erst in den Spalt, der ihnen näher ist, dann in den anderen. Ist dieser Wegunterschied $\Delta q > \frac{\lambda}{2}$, so mitteln sich die Interferenzen weg: Hier wird räumliche Kohärenz zwischen den beiden Spalten benötigt.

Es folgt die Gleichung

$$b \sin \theta < \frac{\lambda}{2}$$

oder

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{D}{b}$$

für die Ausdehnung b der Quelle, die Entfernung D des Quellenzentrums zum Spalt und den Spaltabstand d .

2.2.3 Interferenz an planparalleler Platte (Pohl'scher Versuch)

Prinzip: Ein Strahl trifft schräg auf eine halbtransparente Platte und wird mit Faktor R reflektiert und mit Faktor $T = 1 - R$ gebrochen. Der gebrochene Strahl wird an der gegenüberliegenden Seite an der Luft zurückgeworfen und tritt auf der ersten Seite parallel zum ursprünglich reflektierten Strahl aus. Durch den Umweg des gebrochenen Strahls durch die Platte ergibt sich ein Wegunterschied Δs . Es ist zeitliche Kohärenz erforderlich.

Da beim ersten Strahl eine Reflexion am optisch dichteren Medium und damit ein Phasensprung von π erfolgt, muss statt des Gangunterschiedes Δs der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ betrachtet werden:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} - \pi$$

Nun gilt wie üblich, dass das Maximum m -ter Ordnung für $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ entsteht und das Minimum m -ter Ordnung für $\Delta\varphi = (m + \frac{1}{2}) \cdot 2\pi$.

Beim Einfallswinkel α ist $\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}$, also folgt:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}$$

Alternative Formel mit Wellenlänge statt Phasen:

$$(m + \frac{1}{2})\lambda = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}$$

Hier beschreibt der rechte Ausdruck ein Minimum, um den Phasensprung zu berücksichtigen.

2.3 Michelson-Interferometer

Das Michelson-Interferometer ist ein Messgerät für (optische) Weglängen, das Interferenzerscheinungen erzeugt.

Ein Lichtstrahl (Laser) wird auf einen Strahlteiler ST geschossen und wird mit Anteil R reflektiert, mit Anteil T transmittiert. Beide Anteile werden jeweils an einem Spiegel reflektiert und gelangen zurück zu ST . Dort wird ein Anteil jedes Strahls auf einen beobachtbaren Schirm geworfen.

Die Intensität des Laserpunktes auf dem Schirm ergibt sich aus dem Wegunterschied beider Wege.

Es gilt $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, wobei \vec{E}_1 und \vec{E}_2 gegeneinander phasenverschoben sind. Da $I \sim \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, ergibt sich

$$I = RTI_0(1 + \cos \Delta\varphi).$$

Hierbei läuft $\cos \Delta\varphi$ zwischen -1 und 1 , so dass die Intensität je nach Interferenz zwischen 0 und I_0 schwankt.

Es gilt der Energieerhaltungssatz: Ist auf dem Schirm keine Intensität zu sehen, löschen sich die beiden Strahlen auf dem Weg aus und $\Delta s = (m + \frac{1}{2})\lambda$. Dann wird aber mehr Intensität zurück zur Quelle reflektiert.

In der Praxis misst man auf dem Schirm nicht nur eine bestimmte Intensität, sondern, weil auch ein Laserstrahl kein perfekter Strahl ist, ein System von Ringen als Interferenzmuster, dessen Zentrum heller oder dunkler sein kann.

2.3.1 Michelson-Morley-Experiment: Konstante Lichtgeschwindigkeit

Wenn die Geschwindigkeit c der Lichtausbreitung von der Bewegung \vec{v} des Bezugssystems abhängt, dann läuft das Licht in den beiden Strahlengängen des Michelson-Interferometers verschieden lange, abhängig davon, welcher Strahl in Richtung \vec{v} zeigt. Das Drehen des Interferometers müsste demnach das Interferenzmuster am Ausgang beeinflussen, was aber nicht passiert: Also ist c unabhängig von der Richtung und vom Bezugssystem.

2.4 Vielstrahl-Interferenz und FPI

Im Gegensatz zum Doppelspalt betrachtet man bei der Vielstrahl-Interferenz z.B. viele in einem Gitter angeordnete Spalte oder einen mehrmals in einer Platte reflektierten Strahl.

Sei der eingehende Strahl A_0 und die ausgehenden Strahlen A_1, A_2, \dots . Ein Phasensprung muss nur zwischen den Strahlen A_0 und A_1 betrachtet werden, nicht jedoch bei den folgenden benachbarten Strahlenpaaren, da immer eine gerade Anzahl von Phasensprüngen dazwischen liegt. Es ist also

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi_{\geq 2} = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda}$$

Da bei Reflexionskoeffizient R und Transmissionskoeffizient $1 - R = T$ bei jedem Durchgang etwas Intensität verloren geht:

$$A_i = R^{\frac{i}{2}}(1 - R)A_0$$

Die resultierende Intensität ist die Summe einer unendlichen Reihe, äquivalent zur **Airy-Formel**:

$$I_{\text{Ref}.ges} = I_0 \frac{G}{1 + G}$$

$$I_{\text{Trans}.ges} = I_0 \frac{1}{1 + G}$$

mit der Abkürzung

$$G = \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

und

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{2d}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}.$$

Die Verteilung auf reflektierte und transmittierte Intensität hängt also von der Wellenlänge λ , vom Einfallswinkel α und von der Scheibendicke d und dem Brechungsindex n ab.

Die durch die Scheibe transmittierte Intensität ist maximal, wenn die ausgehenden Strahlen alle konstruktiv miteinander interferieren, d.h. wenn $G = 0$ bzw. $\Delta\varphi = 2\pi \cdot m$ für ganze m . Die transmittierte Intensität ist minimal für $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$. Dann löschen sich je zwei benachbarte austretende Strahlen aus.

Aufgrund der Abhängigkeit von λ werden für jede Konfiguration der Platte nur bestimmte Spektralbereiche durchgelassen.

Auch bei senkrechtem Lichteinfall wirkt die Platte immer noch als Spektralfilter.

Aus

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda}$$

folgt für konstruktive Interferenz ($\Delta\varphi = 2\pi \cdot m$) und bei senkrechtem Einfall ($\alpha = 0$)

$$\lambda = 2\pi \frac{\Delta s}{2\pi \cdot m} = \frac{\Delta s}{m} = \frac{2nd}{m}$$

2.4.1 Fabry-Pérot-Interferometer (FPI)

Das FPI besteht aus einer Glas- oder Quarzplatte mit verspiegelten Außenseiten, oder alternativ aus zwei gegenüberstehenden Platten, deren nach innen zeigende Seite verspiegelt ist. Der Vorteil beim zweiten Aufbau ist die Veränderbarkeit des Abstands d zwischen den Platten.

Das ins FPI einfallende Licht besteht aus parallelen Strahlen (z.B. mit Hilfe einer Linse), die senkrecht eintreffen und zwischen den beiden Platten reflektiert werden und austreten.

Für ein FPI aus einer Platte ist der optische Gangunterschied zwischen Strahlen ein Vielfaches von $n \cdot 2d$ und bevorzugt durchgelassene Wellenlängen λ_m sind

$$\Delta s = m \cdot \lambda_m$$

$$\lambda_m = \frac{\Delta s}{m} = \frac{2dn}{m}$$

Der Spektralraum zwischen zwei Wellenlängen mit maximaler Intensität heißt **freier Spektralbereich**.

2.4.2 Finesse

Die **Finesse** F^* eines FPI ist das Verhältnis zwischen freiem Spektralbereich und Halbwertsbreite der Maxima:

$$F^* = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

Sie bestimmt proportional, wie viele ausgehende Strahlen effektiv miteinander interferieren und ist ein Maß für die Schärfe des Interferenzbildes.

2.5 Beugung am Einzelspalt

Beugung ist ein wellenoptisches Phänomen, das den Erwartungen der geometrischen Optik widerspricht: Lichtstrahlen werden ohne Brechung abgelenkt und treten in Raum ein, der auf geradem Weg nicht erreichbar ist (*geometrischer Schatten*).

Betrachte zunächst eine Kette von Wellenerzeugern (diese können, aber müssen nicht notwendigerweise die Öffnung eines Spaltes darstellen). Zwei benachbarte Sender haben den Abstand d .

Die von den Erzeugern ausgesendeten Wellen sollen Halbkugelwellen mit konstanter Frequenz und Amplitude sein. Für jeden Winkel θ lässt sich ein Bündel paralleler Strahlen betrachten, die jeweils von einem Sender unter dem Winkel θ zum Lot abgestrahlt werden.

Hierbei besteht zwischen Strahlen benachbarter Sender genau der Gangunterschied

$$\Delta s = d \sin \theta.$$

Werden die Amplituden aller Sender unter Berücksichtigung der verschiedenen Phasen aufsummiert, ergibt sich

$$A \cdot \sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\Delta\varphi}$$

und als Summe der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_0 \cdot \frac{\sin^2(\frac{1}{2}N\Delta\varphi)}{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\varphi)} \\ &= I_0 \cdot \frac{\sin^2(\pi N \frac{d}{\lambda} \sin \theta)}{\sin^2(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta)} \end{aligned}$$

Die Funktion I_0 hat ein Maximum bei $\theta = 0$ und fällt dann schnell auf sehr kleine Werte ab, sofern $d < \lambda$ ist — das Hauptmaximum der Intensität enthält 90% der Gesamtintensität.

Obwohl also jeder einzelne Sender eine halbkugelförmige Elementarwelle aussendet, gelangt messbare Intensität nur in einen kleinen Winkelbereich zwischen 0 und $\pm\Delta\theta$.

Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich eine ebene Welle wie in der geometrischen Optik, für $N = 1$ ist dies der Grenzfall eines einzelnen Erzeugers einer Kugelwelle in alle Richtungen.

2.5.1 Einzelspalt

Für die Beugung an einem Spalt der Breite b kann man sich ebenso eine Reihe von N Sendern mit kleinem Abstand $\frac{b}{N}$ vorstellen. Unendlich viele aneinandergereihte Sender von Elementarwellen ergeben dann:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_0}{N^2} \cdot \frac{\sin^2(N\pi \frac{b}{N\lambda} \sin \theta)}{\sin^2(\pi \frac{b}{N\lambda} \sin \theta)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_0}{N^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)}{\sin^2(\pi \frac{b}{N\lambda} \sin \theta)} \\ &= \frac{I_0}{N^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)^2}{N^2}} \\ &= N^2 \frac{I_0}{N^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)}{(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)^2} \\ &= I_0 \cdot \frac{\sin^2(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)}{(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

Hierbei ist $\frac{I_0}{N^2}$ die Intensität eines Spaltes. Das N^2 statt N ergibt sich daraus, dass die Amplitude $A_{ges} = N \cdot A$ ist, aber $I_{ges} \sim A_{ges}^2$.

Die Minima befinden sich an den Positionen $\Delta s = m \cdot \lambda$, d.h. $\sin \theta = \frac{m \cdot \lambda}{b}$, da hier gilt Zähler = 0 und Nenner $\neq 0$.

Dass ein Gangunterschied von λ einem Minimum entspricht, widerspricht der bisherigen Betrachtung von Interferenzerscheinungen. Der Grund dafür liegt im ausgedehnten Strahlenbündel des Spalts: Der Gangunterschied wird hier zwischen den beiden Rändern des Strahlenbündels gemessen. Nun hat aber der erste Strahl einen Gangunterschied von $\frac{\lambda}{2}$ zur Mitte des Bündels und löscht sich zusammen mit diesem aus. Der zweite Strahl löscht sich mit dem Nachbarn des Mittelstrahls aus usw., so dass insgesamt destruktive Interferenz stattfindet. Befindet sich ein drittes Bündel neben dem Bündel, dessen Ende wieder mit dem Gangunterschied $\frac{\lambda}{2}$ versetzt ist, so bleibt dieses über (konstruktive Interferenz). Maxima treten also für

$$\begin{aligned} \Delta s &= (m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda \\ \sin \theta &= \frac{(m + \frac{1}{2}) \cdot \lambda}{b} \end{aligned}$$

auf, hier wird der Zähler maximal ($= 1$). Mit steigendem m wird jedoch der Nenner des obigen Bruchs größer und die Intensitäten der Maxima nehmen ab.

Für einen sehr großen Spalt $b \gg \lambda$ oder $b \rightarrow \infty$ gibt es nur das Maximum $\theta = 0$. Dies ist der Grenzfall der geometrischen Optik. Aus diesem Grund erleben wir Beugungsercheinungen im Alltag nicht für Licht, wohl aber für andere Wellen mit Wellenlängen im cm- oder Meter-Bereich.

Ist andersherum $b < \lambda$, so kann $\sin \theta = \frac{m\lambda}{b}$ für keinen Winkel θ gelten und es gibt somit keine Minima — das Licht des Maximums nullter Ordnung ist über den gesamten Halbraum verteilt.

Um das Beugungsmuster zu erzeugen, ist kein Spalt erforderlich — auch eine matt reflektierende Oberfläche mit geringer Ausdehnung ist eine genügende Quelle von sich überlagernden Elementarwellen.

Bei der Beugung an einer kreisförmigen Blende bilden Maxima und Minima ein Ringmuster, die aus der (mathematisch schwierigeren) Besselfunktion 1. Ordnung $J_1(x)$ hervorgehen:

$$I(r) = I_0 \cdot \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

mit

$$x = 2\pi \frac{R}{\lambda} \sin \alpha.$$

Die ersten beiden Minima von

$$J_1\left(2\pi \frac{R}{\lambda}\right)$$

sind bei

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= 0,61 \frac{\lambda}{R} \\ \sin \alpha_2 &= 1,08 \frac{\lambda}{R}. \end{aligned}$$

2.5.2 Rayleigh-Kriterium

Aus dem Beugungsmuster für ringförmige Blenden lässt sich das sogenannte **Rayleigh-Kriterium** für optisch auflösbare Winkelabstände ableiten.

Tritt Licht durch eine ringförmige Blende, so ergibt sich das erste Minimum bei

$$\sin \delta_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{R}.$$

Dies ist auch der Winkelradius des sogenannten **Beugungsscheibchens**, das hinter der Blende entsteht.

Für das **optische Auflösungsvermögen** wird nun ein optisches Instrument betrachtet. Selbst eine Linse mit ihrem endlichen Durchmesser fungiert als beugende Blende. Der Durchmesser, durch den das Licht im optischen Instrument tritt, wird dessen **Apertur** genannt. Dabei wird ein einzelner Lichtpunkt aus dem Unendlichen auf ein Beugungsscheibchen abgebildet, die Bildweite ist dabei die Brennweite f .

Wird der Lichtpunkt durch eine Linse auf einen festen Abstand f abgebildet, so lässt sich ein Radius r_{min} des dort entstehenden Beugungsscheibchens mit

$$r_{min} = \tan \delta_{min} \cdot f \simeq \delta_{min} \cdot f$$

berechnen. Aus der Besselfunktion erhält man

$$r_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{R} \cdot f.$$

Zwei mit dem Winkel δ_{min} benachbarte Bildpunkte gelten als auflösbar, wenn

$$\sin \delta_{min} \simeq \delta_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{R},$$

wenn ihre Maxima also um mindestens den Radius der Beugungsscheibchen voneinander entfernt sind.

2.6 Interferenz von N Spalten (Gitter)

In der Praxis werden für das Hervorrufen von messbaren Interferenzerscheinungen oft nicht nur zwei Spalte genommen, sondern viele Spalte.

Hier hängt die Intensität $I(\theta)$ gleich auf zwei Arten vom Ablenkwinkel θ ab:

- Die N Spalte verhalten sich wie N kohärente Sender einzelner Strahlen. Dies ergibt das Interferenzmuster der Vielstrahlinterferenz.
- Die Intensität, die ein Strahl in einen Winkel abstrahlt, wird bereits von seiner eigenen Dicke b beeinflusst, da ein Einzelspalt ebenfalls Interferenz durch Beugung provoziert.

Mit einem Spaltabstand d und einer Spaltbreite b ergibt sich als Gesamtintensität das Produkt:

$$I(\theta) = I_{\text{Spalt}} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{\sin^2(N \cdot y)}{\sin^2(y)}$$

mit $x = \pi \frac{b}{\lambda} \sin \theta$ und $y = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$.

Diese Formel ist lediglich das Produkt der beiden Interferenzformeln für Einzelspalt und N kohärente Quellen. Die N -Quellen-Interferenz wird durch die Einzelspaltbeugung **moduliert**.

Sogenannte **Hauptmaxima** entstehen bei

$$\Delta s = d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda$$

d.h.

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}.$$

Hier ist $y = m \cdot \pi$ und Zähler und Nenner des rechten Bruchs werden 0, hierbei geht der Quotient gegen N^2 .

Wird der Zähler 1, aber der Nenner $\neq 0$, so entsteht ein sogenanntes **Nebenmaximum**:

$$\sin \theta = \frac{(p + \frac{1}{2}) \lambda}{N \frac{d}{\lambda}}$$

Dabei ist $p = 1, 2, \dots, N - 2$. Beim Doppelspalt $N = 2$ existieren also keine Nebenmaxima, bei mehr Spalten dagegen schon. Analog gibt es $N - 1$ Nebenminima.

2.6.1 Reflexionsgitter

Ein **Reflexionsgitter** oder **Echelette-Gitter** bringt das Licht nicht durch Transmission versetzter Strahlen zur Interferenz. Stattdessen wird Licht derartig an einer treppenförmigen Oberfläche reflektiert (*échelle* = Leiter), dass die reflektierten Strahlen gebeugt werden und dabei abhängig vom Beugungswinkel einen Gangunterschied aufweisen.

Der Vorteil gegenüber des Transmissionsgitters ist die leichte Herstellbarkeit solcher Gitter durch Einritzen der Treppen. Transmissionsgitter mit 10^5 Spalten sind schwer herzustellen.

Das Gitter besitzt zwei wichtige Normalen, die sogenannte **Gitternormale**, die senkrecht auf der gesamten Gitterebene steht, sowie die **Furchennormale**, die senkrecht zu den angeschrägten Treppenflächen ist. Zwischen den beiden Normalen steht der Winkel θ .

Tritt ein Lichtstrahl mit dem Winkel α auf eine Treppenfläche, so wird er nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und dabei in alle Richtungen gebeugt.

Der Gangunterschied zwischen den ausgehenden Strahlen zweier benachbarter Treppenflächen in Richtung β ist:

$$\Delta s = d(\sin \alpha + \sin \beta)$$

Wobei d die Breite einer Treppenfläche ist (nur die Breite parallel zur Gitterebene wird gemessen). β wird dabei positiv gemessen, wenn es von der Gitternormalen aus gesehen auf derselben Seite wie α liegt, sonst negativ.

Für konstruktive Interferenz gilt hier wieder:

$$m \cdot \lambda = \Delta s = d(\sin \alpha + \sin \beta)$$

oder

$$\beta = \arcsin \frac{m \cdot \lambda}{d} - \sin \alpha.$$

Unter dieser Bedingung ist in Richtung β ist dann jeweils ein Interferenzmaximum der Beugung zu finden.

In das Maximum m -ter Ordnung gelangt besonders viel Intensität, wenn β der natürlichen Reflexionsrichtung entspricht, wenn also

$$\begin{aligned} \alpha - \theta &= \theta - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 2\theta \\ \Rightarrow \theta &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ \Rightarrow \theta &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \arcsin \frac{m \cdot \lambda}{d} - \sin \alpha\right) \end{aligned}$$

Deshalb heißt θ auch **Blaze-Winkel** (*blaze* = funkeln) und das entsprechende Gitter heißt *Blaze-Gitter für die Wellenlänge λ* . Ein weiterer Vorteil eines solchen Gitters ist, dass eine andere Ordnung als das 0-te Maximum am meisten Intensität erhalten kann und damit Interferenz- und Dispersionseffekte leicht sichtbar sind, etwa für die Spektroskopie.

2.7 Fresnelsche Zonen

Betrachte einen Lichtstrahl von A nach B , der eine (gedachte) Ebene auf seinem Weg senkrecht durchstößt. Mit der geometrischen Optik als Modell durchquert der Strahl die Ebene in genau einem Punkt, dem Lotfußpunkt O — dies deckt sich auch mit der Erfahrung aus dem Alltag.

Das Huygenssche Prinzip besagt jedoch, dass von A aus eine (Halb-)Kugelwelle in alle Richtungen ausgeht. Trotzdem sieht man nur einen Strahl — jeder einzelne der unendlich vielen Alternativwege durch den Raum überlagert sich destruktiv mit einem anderen. Dass dies so ist, kann man sich teilweise mit den Fresnelschen Zonen visualisieren.

Sei C ein Punkt auf der Ebene, der den Abstand \overline{OC} von O hat. Dann durchläuft ein Lichtstrahl von A nach B mit Umweg über C insgesamt die Strecke $\overline{AC} + \overline{CB}$.

Nach Pythagoras ist dies:

$$\sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OC}^2} + \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{OB}^2}$$

Das bedeutet aber, dass der Lichtstrahl einen Gangunterschied zum dem direkten Weg besitzt:

$$\Delta s = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OC}^2} + \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{OB}^2} - \overline{AB}$$

Ist dieses ein Vielfaches der Wellenlänge λ , so findet konstruktive Interferenz statt, für Gangunterschiede genau zwischen zwei Vielfachen wie gewohnt destruktive.

Dabei bilden die Strahlen, die identischen Gangunterschied zum Mittelstrahl haben, einen Ring: Der m -te Ring besteht aus den Punkten auf der Ebene, durch die ein Lichtstrahl mit Gangunterschied

$$\Delta s = \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$$

von A nach B läuft. Die Flächen zwischen zwei benachbarten Ringen heißt **Fresnel'sche Zone**.

In der Mitte entsteht also eine einzelne Scheibe mit Radius ρ_1 , für die gilt, dass Lichtstrahlen durch den Rand exakt $\frac{\lambda}{2}$ mehr Weg zurücklegen als durch das Zentrum. Außerhalb der Innenscheibe folgen dann weitere Zonen in Form von Scheiben.

Durch die Abhängigkeit des Gangunterschieds vom Ringradius gilt: Jeder Punkt in einer Fresnelzone hat einen Punkt in einer benachbarten Zone, so dass sich die Strahlen aus den beiden Punkten durch einen Wegunterschied $\frac{\lambda}{2}$ auslöschen.

Die gesamte Intensität hinter der Ebene lässt sich nun beeinflussen, wenn verschiedene Teile von ihr verdeckt werden:

- Werden alle Scheiben bis auf den innersten Kreis verdeckt, etwa durch eine Blende, so verdoppelt sich die Intensität: die Fresnelzonen außerhalb der Mittelscheibe löschen etwa die Hälfte ihrer Intensität aus, wenn sie frei sind (Demtröder 328)
- Wird genau die innerste Scheibe verdeckt, so bleibt die Intensität gleich: Die äußeren Scheiben haben immernoch den negativen halben Betrag der inneren, das Vorzeichen spielt jedoch keine Rolle für die Intensität.

- Wird jeder zweite Ring verdeckt (**Fresnel'sche Zonenplatte**), so steigt die Intensität um ein Vielfaches. Dies passiert, da die destruktive Interferenz jeder dieser Scheiben mit ihrem Nachbarn verhindert wird. Nach der geometrischen Optik zählt nur die Intensität des direkten Strahls, diese hätte demnach gleich bleiben müssen. Diese Optik kann die Fresnelzonen also nicht erklären. Die Zonenplatte wirkt also als Sammellinse (z.B. Röntgenstrahlen kann man nur so fokussieren, da alle optischen Materialien sie absorbieren).

Über die Differenz des Gangunterschiedes kann man zeigen, dass alle Fresnelzonen die gleiche Fläche haben. Damit werden die Ringe nach außen hin schmaler.

Sei r_m der Radius der m -ten Scheibe. Falls sowohl die Lichtquelle (a) als auch der Beobachter (b) einige Größenordnungen mehr entfernt sind als r_m beträgt, und alle Größen weitaus größer sind als die Wellenlänge λ , gilt:

$$r_m^2 = \frac{m\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Für eine unendlich weit entfernte Lichtquelle (d.h. eine ebene Welle) gilt

$$r_m^2 = m\lambda b$$

Da eine Fresnel'sche Zonenplatte als Sammellinse wirkt und eine dünne Linse der Gleichung $f^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$ gehorcht, lässt sich für eine Zonenplatte ebenfalls eine Brennweite definieren:

$$f = \frac{r_m^2}{m\lambda}$$

oder kürzer:

$$f = \frac{r_1^2}{\lambda}$$

$$r_m = \sqrt{m\lambda f}$$

Achtung: Anders als etwa eine Beugungserscheinung sind die Fresnelzonen nur ein Konstrukt, das über den Gangunterschied unmittelbar von der Entfernung des Beobachters B abhängt. Diese Abhängigkeit ist der Grund für die Unterscheidung zwischen Fraunhofer- und Fresnel-Beugung: Abhängig vom Beobachterabstand ändert sich das Beugungsmuster.

2.8 Fresnel-Beugung und Fraunhofer-Beugung

Für einen Spalt oder eine kreisförmige Blende ist die Beugung mathematisch noch einigermaßen gut beschreibbar. Für komplexere Öffnungen benötigt man jedoch ein **allgemeines Beugungsintegral**. Dieses summiert die Sekundärwellen, die nach dem Huygens'schen Prinzip in jedem infinitesimalen Flächenelement der Öffnung σ entstehen.

$$E(x', y') = \int_{\sigma} E_S(x, y) \cdot C \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} d\sigma$$

heißt das **Fresnel-Kirchhoff'sche Beugungsintegral**. Hier ist

x, y Die Koordinaten des Flächenelements $d\sigma$ der Öffnung, gemessen in der $[z = z_0]$ -Ebene der Öffnung

x', y' Die Koordinaten des Beobachters, gemessen in der $[z = z_1]$ -Ebene des Beobachters

r Der Abstand des Beobachters zum Flächenelement

E_S Die Feldstärke, die die Lichtquelle im jeweiligen Flächenelement erzeugt

i Die imaginäre Einheit

C eine Proportionalitätskonstante.

Der Spezialfall der bekannten **Fraunhofer-Beugung** ist dann eine gute Näherung, wenn r für alle Punkte in der Öffnung fast gleich ist und damit etwa dem Abstand $\Delta z = (z_1 - z_0)$ der Beobachterebene zur Öffnungsebene plus einer linearen Änderung mit x und y entspricht:

$$r \simeq \Delta z + (c_1 \cdot x) + (c_2 \cdot y)$$

Der Grund dafür ist, dass r mit einer Taylorreihe entwickelt werden kann und die quadratischen Terme bei $\Delta x, \Delta y \ll \Delta z$ fast null sind, also bei einer kleinen Blende.

Die lineare Fraunhofer-Beugung beschreibt also das Fernfeld einer Beugung.

Die Fresnel-Beugung ist der allgemeinere Fall: Sie enthält auch die quadratischen Terme der Reihe (Demtröder 331) und eignet sich damit für das Nahfeld einer Beugung, $\Delta x, \Delta y \gg \Delta z$.

Genauer bezeichnet man

- $\Delta z \ll \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\lambda}$ als **Nahzone**,
- $\Delta z \simeq \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\lambda}$ als **Übergangszone**,
- $\Delta z \gg \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\lambda}$ als **Fernzone** einer Beugung.

Der Unterschied zwischen Fresnel- und Fraunhoferbeugung kann man sich nicht nur mathematisch veranschaulichen, sondern auch über die Fresnel-Zonen.

Der Radius der ersten Fresnel-Zone, der hellen Scheibe in der Mitte, beträgt

$$r_1 = \sqrt{\lambda \Delta z}.$$

Definiert man einen Öffnungsdurchmesser $d := \sqrt{\Delta x \cdot \Delta y}$, und wählt man einen Abstand Δz so, dass die innerste Fresnel-Zone genau Radius $\frac{d}{2}$ hat, erhält man:

$$2\lambda \Delta z = \Delta x \cdot \Delta y$$

Hier ist die Öffnung in der Größenordnung der ersten Fresnel-Zone. Entsprechend lassen sich die drei Beugungsarten auch beschreiben als:

- **Nahzone:** kleiner Abstand, viele Fresnelzonen beeinflussen das Beugungsbild
- **Übergangszone:** mittlerer Abstand, wenige Fresnelzonen beeinflussen das Beugungsbild
- **Fernzone:** großer Abstand, nur noch innerste Fresnelzone wirksam, „gewöhnliche“ Fraunhofer-Beugung

2.9 Polarisation

Die allgemeine elektromagnetische Welle lässt sich schreiben als Auslenkung einer bestimmten Feldstärke in einer Phase φ , die von Ort und Zeit abhängt.

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}z)}$$

E_0 ist die **Polarisation** des Lichtes. Hier gibt es einige Spezialfälle:

- $\vec{E}_0 = E_{0,x}\hat{e}_x + E_{0,y}\hat{e}_y$ — sind die x-Anteile und die y-Anteile gleichphasig, so heißt das Licht **linear polarisiert**.
- $\vec{E}_0 = E_{0,x}\hat{e}_x + E_{0,y}\hat{e}_y \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ — eilt der x-Anteil dem y-Anteil um 90° vor oder nach, so ist das Licht **zirkular polarisiert**. Die Auslenkung der Welle beschreibt eine „Schraube“ im Raum.
- Für Phasenverschiebungen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist das Licht **elliptisch polarisiert**. Es wird für zirkulare Polarisation $E_{0,x} = E_{0,y}$ gefordert, und sonst ebenfalls von elliptisch polarisiertem Licht geredet.
- Sogenanntes **unpolarisiertes Licht** existiert nicht als ein einzelnes Photon, sondern ist die Bezeichnung für Licht, in denen mehrere zufällig polarisierte Wellen überlagert sind.

2.9.1 Polarisation bei Brechung und Reflexion

Um für die Brechung und Reflexion an einer Welle nicht nur die Winkel berechnen zu können (Snellius-Gesetz), sondern auch quantitativ die beiden resultierenden Feldvektoren \vec{E}_{brech} und \vec{E}_{refl} zu bestimmen, verwendet man die **Fresnel-Formeln**. Hierbei gibt es verschiedene Formeln für die Anteile von \vec{E} , einmal für die, die senkrecht zur Materialebene schwingen, und für die, die senkrecht zur Materialebene schwingen. Deshalb ändert sich bei Brechung und Reflexion im Allgemeinen die Polarisation einer Welle!

Für bestimmte Eintritts- und Austrittswinkel α und β wird der zur Ebene senkrechte Anteil von \vec{E}_{refl} null. Damit ist das reflektierte Licht *linear* polarisiert, die Polarisationsrichtung ist parallel zur reflektierenden Ebene.

Der Winkel α_B wird **Brewster-Winkel** genannt und lässt sich errechnen über

$$\alpha_B + \beta = 90^\circ$$

oder (Snellius einsetzen)

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

Eine Folge davon ist, dass auch in der Natur linear polarisiertes Licht vorkommt, z.B. Reflexionen an einer Wasseroberfläche. Einige Tiere können linear polarisiertes Licht auch von unpolarisiertem unterscheiden, um sich zu orientieren.

2.9.2 Versuch: Brewster-Pyramide

2.9.3 Doppelbrechung

In sogenannten **optisch anisotropen Medien** (wie z.B. Kalkspat) ist der Brechungsindex von der Richtung des einfallenden Lichts und von seiner Polarisationsrichtung abhängig. Der Grund dafür ist, dass die Eigenfrequenzen schwingender Elektronen im Stoff für verschiedene Richtungen verschieden hoch sind.

Formell lässt sich dies so beschreiben, dass elektrische Feldstärke und dielektrische Verschiebung nicht mehr parallel sind, während das Licht das Medium durchquert: $\vec{D} \nparallel \vec{E}$ mit

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Statt eines einzelnen Brechungsindex gibt es dann ein **Brechungsindex-Ellipsoid**.

Bei einer solchen Ausbreitung ist nicht mehr $\vec{S} \parallel \vec{k}$ gegeben, da $\vec{E} \perp \vec{S}$ und $\vec{D} \perp \vec{k}$. Obwohl die Phasenflächen weiterhin senkrecht auf \vec{k} stehen, geschieht die Energieausbreitung in Richtung \vec{S} (Poynting-Vektor) und damit auch die Lichtausbreitung im Sinne der geometrischen Optik.

Bei einer Brechung an einem anisotropen Medium gibt es zwei Richtungen, in denen \vec{D} und \vec{E} wieder parallel sind, in diese beiden Richtungen wird gebrochen:

- in einen **ordentlichen Strahl** (der auch in einem isotropen Medium entstehen würde und dem Snellius-Gesetz gehorcht)
- und einen **außerordentlichen Strahl**. Seine Elementarwellen an der brechenden Fläche bilden Rotationsellipsoide, keine Halbkugeln. Er gehorcht scheinbar nicht dem Snellius-Gesetz. Dieses ist aber erfüllt, wenn man es auf die Richtungen des Wellenvektors \vec{k} anwendet und nicht auf die eigentliche Ausbreitung des Strahls (welche die Energieausbreitung \vec{S} ist).

Die Doppelbrechung liefert nur dann zwei getrennte Strahlen, wenn die Eintrittsrichtung in das Medium verschieden von der sogenannten **optischen Achse** des Kristalls ist.

Die beiden ausgehenden Strahlen sind stets linear polarisiert und zwar um 90° zueinander gedreht. Daher können sie leicht mit Polarisationsfiltern getrennt werden.

3 Thermische Strahlung und Photonen

3.1 Einführung

Eine wichtige Eigenschaft einer Strahlungsquelle ist ihre **Strahlungsdichte** S^* oder auch **Leuchtdichte**.

Sie ist die **Leistung**, die eine Quelle pro Quellen-Flächenelement dA (nicht Detektor-Flächenelement!) und pro Raumwinkelement $d\Omega$ (Raumwinkel, in dem Detektor aufgespannt ist) abstrahlt.

$$S^* = \frac{dP}{\cos \theta dA d\Omega}$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen der Richtung des Raumwinkels und der tatsächlichen Strahlungsrichtung. Der Faktor $\cos \theta$ ist notwendig, da für $\theta \neq 0$ der „Blick“ auf ein Flächenelement dA nicht senkrecht ist und das Flächenelement eine kleinere effektiv sichtbare Fläche hat (*Projektion*).

Für eine gesamte Quelle lässt sich dann ihre **Strahlungsstärke** in eine bestimmte Richtung integrieren:

$$J(\theta) = \int_A S^* \cos \theta dA$$

J hat die Einheit *Watt pro Steradian* (Leistung pro Raumwinkel). Man betrachtet also einen bestimmten Raumwinkel, d.h. einen Kegel mit Öffnungswinkel θ .

3.1.1 Lambert-Strahler

Als **Lambert-Strahler** werden Strahler bezeichnet, für die die Strahlungsdichte S^* konstant ist. Sie heißen auch **diffuse Strahler**, da sie in alle Richtungen gleichmäßig Leistung abgeben. Für solche Strahler gilt:

$$J(\theta) = J_0 \cos \theta$$

mit

$$J_0 = \int_A S^* dA = \text{const.}$$

Es lässt sich die Abhängigkeit von θ also aus dem Integral herausziehen. Die entstehende Formel heißt **Lambert-Gesetz**.

Beispiele für Lambert-Strahler aus der Vorlesung:

- matt-weißes Blatt Papier
- Öffnung in einem strahlungsgefüllten Hohlraum

Bei Nicht-Lambert-Strahlern trifft man häufig auf ein Strahlungsmaximum senkrecht zur Fläche, etwa bei Projektionsleinwänden.

3.1.2 Spektrale Strahlungsdichte

Wenn Licht von einer Leuchtquelle (bspw. Sonne, Glühlampe) ausgeht, so enthält es einen ganzen Bereich von Frequenzen. Dabei sind einige Frequenzen von mehr Photonen vertreten als andere, daher macht es Sinn, eine **spektrale Strahlungsdichte** $S_\nu^* d\nu$ zu definieren, die die Strahlungsdichte nur für die Frequenz ν misst. Nach dieser Definition ergeben alle spektralen Einzeldichten zusammen wieder S^* :

$$S^* = \int_{\nu=0}^{\infty} S_\nu^* d\nu$$

Die komplette Strahlung einer Quelle (J integriert über eine Kugeloberfläche) lässt sich messen, indem ein kugelförmiger Detektor benutzt wird, der den kompletten Raumwinkel um sie ausfüllt. Ein Hilfsmittel für diese „Integration“ ist die **Ulbricht-Kugel**, eine innen mattweiß gefärbte Kugel mit einem kleinen Loch an einer Seite, das von der direkten Bestrahlung durch die Quelle abgeschirmt ist und deshalb die Gesamtheit der diffus reflektierten Strahlung misst.

3.2 Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Ein Körper mit Temperatur T tauscht mit seiner Umgebung solange Energie aus, bis diese die gleiche Temperatur T' hat wie er selbst.

Vernachlässigt man mechanische Arten des Wärmetransport (*Wärmeleitung* durch molekulare Stöße, *Konvektion* durch Massentransport), so bleibt nur die **Wärmestrahlung** für den Energieaustausch übrig.

Trifft Strahlung auf einen Körper auf, so wird sie teilweise absorbiert und teilweise reflektiert. Der **Absorptionskoeffizient** $\varepsilon(\nu)$ hängt von der Wellenlänge ab und ist definiert als

$$\frac{\text{absorbierte Strahlung}}{\text{auftreffende Strahlung}}$$

Dass ε von der Frequenz ν abhängt, sorgt dafür, dass Stoffe Farben haben können.

Gilt für eine Frequenz ν , dass $\varepsilon(\nu) = 1$, also alle Photonen einer Farbe absorbiert werden, so heißt der Körper „schwarz für die Frequenz ν “.

Ist $\varepsilon = 1 = \text{const.}$, so ist der Körper ein **idealer schwarzer Körper**.

Man betrachte nun zwei gegenüberstehende strahlende Flächen, deren Temperatur ausgeglichen ist. Fläche 1 strahlt mit Leistung P_1 und absorbiert selbst mit dem Koeffizienten ε_1 . Fläche 2 strahlt analog mit P_2 und absorbiert mit ε_2 .

Die gesamte Leistung, die in dem System von der Fläche 1 absorbiert wird, ist also $\varepsilon_1 \cdot P_2$. Analog absorbiert Fläche 2 insgesamt $\varepsilon_2 \cdot P_1$.

Nun müssen die beiden aufgenommenen Leistungen aber gleich sein, damit die beiden Flächen im thermodynamischen Gleichgewicht bleiben, denn sonst wäre der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt. Also:

$$\varepsilon_1 \cdot P_2 = \varepsilon_2 \cdot P_1$$

$$P_2 = \varepsilon_2 \frac{P_1}{\varepsilon_1}$$

Unabhängig von der ersten Fläche gilt also für die zweite Fläche, dass ihre Strahlungsleistung proportional zu ihrer eigenen Absorptionsfähigkeit ist, und umgekehrt dasselbe für die erste Fläche.

Kirchhoff formulierte auf dieser Basis das **Kirchhoffsche Strahlungsgesetz**:

$$P = \varepsilon \cdot P_{\text{schwarz}}$$

Hierbei ist P_{schwarz} die Leistung, die ein schwarzer Körper ($\varepsilon = 1$) mit derselben Temperatur abstrahlen würde. Jeder Körper strahlt also umso besser, je höher seine eigene Absorptionsfähigkeit ist.

3.3 Hohlraumstrahlung

Einem idealen schwarzen Körper mit $\varepsilon \simeq 1$ kommt ein sogenannter **Hohlraumstrahler** nahe: Ein abgeschlossener, luftleerer Raum umgeben von intransparenten und isolierenden Wänden, der durch eine sehr kleine Öffnung Strahlung emittieren kann. Einfallende Strahlung wird durch die häufigen Reflexionen an den Wänden fast vollständig absorbiert. Die Öffnung ist damit ein *schwarzer Strahler*.

Die durch die Öffnung abgegebene Strahlung wird kompensiert, indem die Wände des Hohlraums beheizt werden. Wird so die Temperatur T konstant gehalten, stellt sich ein thermisches Gleichgewicht ein, in dem der Hohlraum mit der elektromagnetischen Strahlung eines bestimmten Spektrums gefüllt ist, der **Hohlraumstrahlung**. Die konstante Hohlraumstrahlung stellt sich ein, da die Wände einerseits Strahlung emittieren und abkühlen, andererseits aber auch durch absorbierte Strahlung aufgewärmt werden. Dies passiert solange, bis diese beiden Vorgänge sich gegenseitig kompensieren, abhängig von der Temperatur T für ein bestimmtes Spektrum und bestimmte Intensität der Strahlung im Inneren.

Man kann über das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz argumentieren, dass die Strahlung im Inneren isotrop, homogen und unpolarisiert sein muss und außerdem unabhängig vom Volumen und der Wandbeschaffenheit des Hohlraums ist.

Für einen solchen schwarzen Strahler, d.h. für die Öffnung des Hohlraums, kann man die *spektrale Strahlungsdichte* S_ν^* berechnen, also die Strahlungsdichte für eine bestimmte emittierte Frequenz λ . Dies ist mit den Strahlungsgesetzen von **Rayleigh/Jeans**, **Wien** und **Planck** möglich.

Da die Öffnung auch ein Lambert-Strahler sein muss (wie jeder schwarzer Strahler), ist ihre spektrale Strahlungsdichte, damit also ihr Spektrum und ihre Intensität, nur abhängig von der spektralen Energiedichte innerhalb des Hohlraums. Die spektrale Energiedichte $w_\nu(T)d\nu$ hat die Einheit $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$ und misst die Energie pro Raum im Frequenzbereich $d\nu$. Analog zur Strahlungsdichte kann man über alle Frequenzen integrieren, um die gesamte Energiedichte des E-Feldes im Hohlraum zu erhalten.

Das Verhältnis zwischen S_ν^* und w_ν ist proportional:

$$S_\nu^* = \frac{c}{4\pi} w_\nu(T)$$

Für die Herleitung der spektralen Energiedichte $w_\nu(T)$ betrachtet man den Hohlraumstrahler zunächst als **Hohlraumresonator** — also als ein Gefäß für stehende Wellen. Abhängig von der Form des Hohlraums sind nur für bestimmte Wellenlängen λ stehende Wellen möglich — dieser Ausgangspunkt wurde für die alle der oben genannten Strahlungsgesetze gewählt.

3.3.1 Moden im Hohlraumresonator und Energiedichte

Die Energiedichte im Hohlraum lässt sich über die sogenannte **Modendichte** herleiten, die Anzahl möglicher stationärer Eigenschwingungen (stehende Wellen) in einem bestimmten Raumvolumen.

Stehende Wellen der Wellenlänge λ können in einem eindimensionalen beschränkten Bereich existieren, wenn die Länge des Bereichs genau ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist. (Dann sind Wellenknoten an den Enden des Bereichs.)

Diese Einschränkung lässt sich ohne Weiteres auf den dreidimensionalen Raum erweitern.

Man betrachte einen Würfel mit der Kantenlänge a . Für eine stehende Welle im Würfel gelten dann immer die Gleichungen

$$k_x = \frac{m_x \cdot \pi}{a}, k_y = \frac{m_y \cdot \pi}{a}, k_z = \frac{m_z \cdot \pi}{a}$$

oder

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$$

Dabei ist $k = \frac{\omega}{c}$ der Wellenvektor (Einheit: „Phase pro Meter“, $\frac{1}{\text{m}}$) und die m_i sind natürliche Zahlen. Die Phase π entspricht einer halben Wellenlänge.

Trägt man die erlaubten \vec{k} als Punkte in einem dreidimensionalen Koordinatensystem über k_x, k_y, k_z auf, bilden sie ein dreidimensionales Gitter mit der Gitterkonstante $\frac{\pi}{a}$ (inverser Raum = Einheit $\frac{1}{\text{m}}$).

Eine Einheitszelle in diesem Gitter hat das Volumen $\left(\frac{\pi}{a}\right)^3$ und jeder Punkt im Gitter entspricht einer erlaubten stationären Welle.

Die obige Gleichung in diesem Koordinatensystem dargestellt ergibt eine dreidimensionale Kugel mit Radius k , die alle erlaubten Moden umschließt.

Für die Modendichte berechnet man die Anzahl der Gitterpunkte in der Kugel:

$$\frac{\text{Kugelvolumen}}{\text{Einheitszelle}} = \frac{4\pi}{3} k^3 \left(\frac{a}{\pi}\right)^3$$

Da nur die positiven Vielfachen in Betracht kommen, bleibt nur ein Achtel der Kugel übrig. Außerdem verdoppelt sich die Anzahl, da es zwei unabhängige Polarisations Ebenen gibt.

$$N = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4\pi}{3} k^3 \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 = \frac{\pi}{3} k^3 \left(\frac{a}{\pi}\right)^3$$

Mit $a^3 = V$ (Volumen) und $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}$ ergibt sich:

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \frac{\nu^3}{c^3}$$

Die gewünschte **spektrale Modendichte** für eine Frequenz wird mit $n(\nu)$ bezeichnet und ist

$$n(\nu) = \frac{d}{d\nu} \frac{N}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Wenn der Hohlraum sehr groß gegen die Wellenlänge ist, gilt die Gleichung auch für beliebige Geometrien.

Aus der spektralen Modendichte lässt sich die **spektrale Energiedichte** ableiten, wenn bekannt ist, wieviel Energie in den stehenden Wellen einer einzelnen Mode enthalten ist.

Dieser Faktor wird als $\overline{w}_\nu(T)$ bezeichnet und hängt von der Temperatur sowie der Frequenz ab.

Die spektrale Energiedichte ist dann:

$$\begin{aligned} w(\nu) &= n(\nu) \cdot \overline{w}_\nu(T) \\ &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \overline{w}_\nu(T) \end{aligned}$$

Die einzelnen Versuche, ein Strahlungsgesetz aufzustellen, unterschieden sich in der Methode, $\overline{w}_\nu(T)$ herzuleiten, die mittlere Energie pro Mode.

Letztlich ist einzig die Planck'sche Herleitung von $\overline{w}_\nu(T)$, die den Beginn der Quantentheorie darstellt, die richtige, sie geht für niedrige Frequenzen aber ins Rayleigh-Jeans-Gesetz über.

3.3.2 Rayleigh-Jeans-Strahlungsformel

Rayleigh und Jeans haben folgende Annahme für die mittlere Energie pro Eigenschwingung getroffen:

$$\overline{w}_\nu(T) = k_B \cdot T$$

Der Wert entspricht der Energie einer klassischen harmonischen Schwingung im Hohlraumresonator. (k_B ist die Boltzmann-Konstante in $\frac{\text{Joule}}{\text{Kelvin}}$.)

Hieraus folgt das **Rayleigh-Jeans-Strahlungsgesetz**:

$$w(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B \cdot T$$

Und damit:

$$S_\nu^* = \frac{c}{4\pi} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B \cdot T = \frac{2\nu^2}{c^2} \cdot k_B \cdot T$$

Dieses Gesetz entspricht für kleine Frequenzen bzw. für große Wellenlängen der Realität. Es kann jedoch nicht für beliebige Frequenzen stimmen, da für $\nu \rightarrow \infty$ auch $S_\nu^* \rightarrow \infty$

gilt — für kleine Frequenzen würde die Energiedichte unendlich werden und es würde die sogenannte **UV-Katastrophe** eintreten.

Das ist in der Realität nicht der Fall — vielmehr hat das Spektrum eines schwarzen Strahlers ein temperaturabhängiges Intensitätsmaximum bei einer Wellenlänge λ_{\max} und knickt für noch höhere Frequenzen wieder ab und nähert sich Null.

3.4 Planck'sche Strahlungsformel

Um das Spektrum eines schwarzen Strahlers zu erklären, nahm Planck 1900 an, dass Energie nicht auf beliebig viele, beliebig kleine Teilenergien aufgeteilt werden kann, sondern dass Energie nur in bestimmte Teile einer festen Größe aufgeteilt werden kann, den **Energiequanten**. Er stellte fest, dass Strahlung einer Frequenz ν nur ganze Vielfache von $h \cdot \nu$ als Energie enthalten kann, h war dabei eine „Hilfsvariable“ in den Rechnungen mit dem Wert

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{Hz}} \text{ oder Js.}$$

Obwohl Planck selbst nicht an eine Quantenwelt glaubte, bedeutet die Entdeckung von h den Beginn der Quantentheorie.

Heute kennen wir h als **Planck'sches Wirkungsquantum** und die *Energiequanten* als **Photonen**.

Eine Mode (Eigenschwingung) im Hohlraum kann also nur eine Energie $m \cdot h \cdot \nu$ annehmen, für eine natürliche Zahl m . Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mode für ein bestimmtes m diese Energie annimmt, folgt der Boltzmann-Verteilung für Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht:

$$p(E = m \cdot h \cdot \nu) \sim e^{-\frac{m \cdot h \cdot \nu}{k_B T}}$$

Oder, mit der Abkürzung $\mathcal{E} = \frac{h \cdot \nu}{k_B T}$ als dimensionsloses Verhältnis zwischen Photonenenergie (bei Frequenz ν) und thermischer Teilchenenergie (bei Temperatur T):

$$p(E = m \cdot h \cdot \nu) \sim e^{-m\mathcal{E}}$$

Exakt hat sie die Wahrscheinlichkeit

$$p(E = m \cdot h \cdot \nu) = \frac{e^{-m\mathcal{E}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\mathcal{E}}}$$

wobei der Nenner die Gesamtwahrscheinlichkeit für alle Energien ergibt.

Werden die Energien anhand ihrer Wahrscheinlichkeiten gewichtet gemittelt, so erhält man eine andere Formel für die **mittlere Energie pro Mode** $\overline{w}_\nu(T)$:

$$\overline{w}_\nu(T) = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot h \cdot \nu \cdot p(E = m \cdot h \cdot \nu)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\overline{w}_\nu(T) = \frac{h \cdot \nu}{e^{\mathcal{E}} - 1}$$

Die Energiedichte insgesamt ist dann wieder die Modendichte multipliziert mit der Modenenergie:

$$w(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h \cdot \nu}{e^{\mathcal{E}} - 1} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\mathcal{E}} - 1}$$

Diese Gleichung ist das **Planck'sche Strahlungsgesetz** und berechnet das Spektrum eines schwarzen Strahlers sehr genau.

Für sehr kleine Frequenzen ν geht das Gesetz in das Rayleigh-Jeans-Gesetz über. Dann geht $\mathcal{E} \rightarrow 0$ und es gilt $e^{\mathcal{E}} \simeq 1 + \mathcal{E}$.

Aus

$$w(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\mathcal{E}} - 1}$$

wird dann wieder

$$w(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\mathcal{E}},$$

also genau

$$w(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T.$$

3.4.1 Wien'sches Verschiebungsgesetz

Wien hat selbst ein eigenes Strahlungsgesetz aufgestellt, das jedoch im Gegensatz zum Rayleigh-Jeans-Gesetz nur für hohe Frequenzen erfüllt ist. Erst Planck vereinigte beide Grenzfälle in seinem korrekten Ansatz.

Ein anderes Gesetz von Wien ist das sogenannte **Verschiebungsgesetz**.

Es gibt an, für welche Frequenz bzw. Wellenlänge die Strahlungsintensität maximal ist. Es entsteht, wenn die Planck'sche Formel nach der Frequenz abgeleitet wird und lautet:

$$\nu_{\max} = \frac{2,82}{h} k_B T$$

oder

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = \text{const.}$$

oder

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{const.}$$

Das Verschiebungsgesetz verdankt seinen Namen dieser linearen Abhängigkeit: Die Frequenz mit der größten Strahlungsintensität steigt also linear mit der Temperatur.

Mit Hilfe dieses Gesetzes kann man etwa die Temperatur von Oberflächen von Sternen bestimmen, oder der Hintergrundstrahlung des Universums eine „Temperatur“ von etwa 3 Kelvin zuordnen.

3.5 Stefan-Boltzmann-Strahlungsformel

Ist man an der gesamten Energie im schwarzen Hohlraumstrahler interessiert, d.h. an der Fläche unter der Planck'schen Kurve, so muss man die Energien der einzelnen Frequenzen aufintegrieren.

$$\begin{aligned} W(T) &= \int_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu}(\nu, T) d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\mathcal{E}} - 1} \\ &= \frac{4\pi^5 (k_B)^4}{15h^3 c^3} T^4 \end{aligned}$$

Umgerechnet in die Leistung, die in den gesamten Halbraum abgestrahlt wird, ist diese

$$P = \sigma T^4$$

mit

$$\sigma = \frac{2\pi^5 (k_B)^4}{15h^3 c^2},$$

der **Stefan-Boltzmann-Konstanten**.

$$P = \sigma T^4$$

ist die **Stefan-Boltzmann-Strahlungsformel**. Ein Körper erhöht also sehr stark seine Abstrahlleistung, wenn seine Temperatur erhöht wird.

3.6 Photoeffekt

Den Photoeffekt konnte Einstein 1905 nachweisen, nachdem zunächst Hallwachs 1888 ähnliche Beobachtungen machte, und damit die Charakterisierung des Lichtes als rein wellenartige Erscheinung endgültig widerlegen.

Der Aufbau des Versuchs besteht aus einer negativ geladenen Metallplatte, die mit Licht bestrahlt wird. Die von den Lichtwellen übertragene Energie wird beim Stoß auf Elektronen übertragen, die dann aus dem Material gelöst werden und auf eine positiv geladene Gegenplatte fallen und einen messbaren Strom erzeugen.

Dieser Strom ist proportional zur Intensität des Lichts und steigt auch mit höherer Frequenz des Lichts an.

Unterhalb einer bestimmten Grenzfrequenz, abhängig vom Material, ist jedoch gar kein Strom mehr messbar. Diese Beobachtung würde man nicht erwarten, wenn das Licht reine Wellennatur hätte.

Der Grund ist natürlich, dass die Photonen nur ganze Vielfache von $h \cdot \nu$ als Energie übertragen können und damit als Teilchen fungieren.

Außerdem stellt man fest, dass die Energie, die jedes Elektron übertragen bekommt, nicht mit der Intensität zunimmt, sondern nur mit der Frequenz. Hier ist der Grund,

dass immer nur ein einzelnes Photon seine Energie überträgt, eine höhere Anzahl der Photonen (Intensität) sorgt nur für mehr „herausgeschlagene“ Elektronen, die aber nicht mehr Energie als vorher besitzen. Die Energie der Elektronen kann man mit einer Gegenspannung feststellen. Für die kinetische Energie eines herausgelösten Elektrons gilt:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - W_{\text{austritt}}$$

Für $h\nu < W_{\text{austritt}}$ werden keine Elektronen herausgelöst und das Licht wird vollständig in Wärme umgewandelt.

3.7 Compton-Effekt

Der Photoeffekt war bis 1922 der einzige Versuch, der die Teilcheneigenschaft von Photonen belegte. Arthur Compton stellte dann in seinem Versuch fest, dass Photonen zu Stoßreaktionen in der Lage sind, die bis dahin in der Vorstellung nur Materieteilchen vorbehalten waren, 1927 folgte dann der Nobelpreis.

Trifft ein massebehaftetes Teilchen m_1 auf ein zweites ruhendes mit der Masse m_2 , so überträgt es einen Teil seiner Energie auf das zweite Teilchen sowie einen Teil seines Impulses.

Im zweidimensionalen lassen sich die resultierenden Impulse nach dem Stoß nicht vorhersagen (die entsprechenden Erhaltungsgleichungen sind *unterbestimmt*), aber es gibt gewisse maximale Ablenkungswinkel für die bewegte Masse.

Wenn ein Photon mit einer gewissen Wellenlänge λ auf ein ruhendes Elektron trifft, so passieren drei Dinge:

- das Photon wird in seiner Bahn *abgelenkt*. Dies entspräche der Erwartung, wenn das Photon ein massebehaftetes Teilchen wäre.
- das Elektron bewegt sich, der Impulserhaltung folgend.
- die Wellenlänge λ des Photons ist größer geworden, das Photon hat also Energie an des Elektron verloren.

Das Photon kann beim Stoß nicht langsamer werden wie eine klassische stoßende Kugel, der Energieverlust schlägt sich also in einer höheren Wellenlänge nieder.

Auch ist hier lediglich ein **elastischer Stoß** möglich, da weder das Elektron noch das Photon innere Energie besitzen könnten (im Gegensatz zu Molekülen).

Trotz seiner Massenlosigkeit muss man dem Photon also einen Impuls zuordnen. Der Photonenimpuls ist

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

Mit den Energien

$$\begin{aligned} E_e &= m_0 c^2 \\ E_\gamma &= h\nu \end{aligned}$$

gelten die Erhaltungssätze:

$$\begin{aligned}E_e + E_\gamma &= E'_e + E'_\gamma \\ \vec{p}_\gamma &= \vec{p}'_e + \vec{p}'_\gamma\end{aligned}$$

Mit eingesetzten relativistischen Energien folgt die Gleichung

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

wobei θ der Winkel der Richtung ist, die das Photon nach dem Stoß annimmt. Bemerkenswert ist, dass die Wellenlängenänderung des Photons also nicht von der ursprünglichen Energie des Photons abhängt, sondern nur von der Ruhemasse m des Stoßpartners und dem Streuwinkel.

Es wird

$$\frac{h}{m_0c} = \lambda_C$$

auch als **Compton-Wellenlänge** bezeichnet und die Gleichung vereinfacht sich damit zu

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

Bekannte Compton-Wellenlängen für Elementarteilchen sind:

Elektron: $\lambda_C = 2,4263 \cdot 10^{-12}m$

Proton: $\lambda_C = 1,321 \cdot 10^{-15}m$

Neutron: $\lambda_C = 1,319 \cdot 10^{-15}m$

Die Änderung der Wellenlänge durch einen Stoß ist proportional zur Compton-Wellenlänge. Die übertragene Energie

$$\Delta E = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda'}$$

ist jedoch umso größer, je kleiner die ursprüngliche Wellenlänge ist. Damit übertragen energiereichere Photonen auch „prozentual“ mehr Energie.

3.8 Photonen

Eine Energiequantelung widerspricht den alltäglichen Erfahrungen, wir nehmen Energie als eine kontinuierliche Größe wahr. Der Grund dafür ist, dass alltägliche Energiemengen viele Größenordnungen über dem Energiequant liegen und die relative Änderung durch Entfernen oder Hinzufügen eines Quants vernachlässigbar ist. Erst im mikroskopischen Bereich ist die Quantelung messbar.

Zusammenfassend kann man die Eigenschaften des Photons beschreiben als:

$$\text{Energie } E = h\nu = \hbar\omega$$

$$\text{Impuls } p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$\text{Ruhemasse } m_0 = 0$$

Das *reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum* \hbar ist definiert als $\frac{h}{2\pi}$.

Will man die Formel $E = mc^2$ auch für Photonen gelten lassen, so muss man die relativistische Masse zumindest formal definieren:

$$m = \frac{p}{c} = \frac{h\nu}{c^2}$$

Wegen seiner relativistischen Masse (die äquivalent zu Energie ist) wird Licht auch in Gravitationspotentialen in seiner Richtung abgelenkt. Massebehaftete Körper, die potentielle Energie freisetzen (durch „Herunterfallen“) werden beschleunigt, bei Licht wird aber wieder nur die Frequenz größer (*Blauverschiebung*). „Klettert“ Licht andersherum gegen eine Gravitationskraft ein Potential hinauf, so wird es energieärmer (*Rotverschiebung*).

3.8.1 Spin

Neben dem Impuls hat das Photon auch einen **Eigendrehimpuls**, auch genannt **Spin**. Er ist entweder $+\hbar$ (Rechtsschraube um den Impulsvektor, auch *up* genannt) oder $-\hbar$ (Linksschraube um den Impulsvektor, auch *down* genannt).

Dieser Eigendrehimpuls ist genau die **Polarisation** der Photonen in Wellenform.

Damit gibt es nur Links- und Rechtszirkularität als Polarisationszustände für Photonen, lineare Polarisation entspricht der Überlagerung von $+\hbar$ und $-\hbar$ durch mehrere Photonen. Man kann sich die Frage stellen, ob ein einzelnes Photon dann überhaupt linear polarisiert sein kann, oder ob dafür immer Licht mit zwei oder mehr Photonen benötigt wird. Die Antwort ist: Auch ein einzelnes Photon kann eine (quantenmechanische) Überlagerung mehrerer Polarisationen besitzen.

3.9 Einstein'scher Ansatz für Planck'sche Strahlungsformel

Das Spektrum des schwarzen Strahlers kann auch über die diskreten Energiezustände, die ein Atom annehmen kann, hergeleitet werden.

Diesen Ansatz wählte Einstein 1917.

Er führte dabei die sogenannten **Einstein-Koeffizienten** für Übergänge zwischen 2 Energieniveaus ein:

B₁₂ Absorption eines Photons (Atom geht von Energieniveau 1 in Niveau 2). Die Absorption ist proportional zur Energiedichte.

A₂₁ spontane Emission eines neuen Photons (Atom geht von Niveau 2 nach 1). Diese hängt nur davon ab, wie viele Atome bereits im angeregten Zustand sind.

B_{21} induzierte bzw. stimulierte Emission eines Photons (Niveau 2 nach 1). Diese hängt sowohl von der Energiedichte als auch von der Zahl der angeregten Atome ab.

Die Koeffizienten haben die Einheit $\frac{\text{Wahrscheinlichkeit eines Übergangs}}{\text{Zeit} \cdot \text{Energiedichte}}$ für B
bzw. $\frac{\text{Wahrscheinlichkeit eines Übergangs}}{\text{Zeit}}$ für A .

Bezeichnen N_1 und N_2 die Anzahl der Atome auf dem jeweiligen Energieniveau, so kann man Differentialgleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned}\text{Absorption: } dN_{12} &= B_{12} \cdot w(\nu, T) dt \\ \text{spontane Emission: } (dN_{21})' &= A_{21} \cdot N_2 dt \\ \text{induzierte Emission: } (dN_{21})'' &= B_{21} \cdot N_2 \cdot w(\nu, T) dt\end{aligned}$$

Wenn sich ein Gleichgewicht einstellen soll, gilt:

$$dN_{12} - (dN_{21})' - (dN_{21})'' = 0$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \cdot w(\nu, T)}{A_{21} + B_{21} \cdot w(\nu, T)}$$

Im thermischen Gleichgewicht gilt zudem die Boltzmann-Verteilung:

$$\begin{aligned}\frac{N_2}{N_1} &= \frac{e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} \\ \frac{B_{12} \cdot w(\nu, T)}{A_{21} + B_{21} \cdot w(\nu, T)} &= \frac{e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{e^{-\frac{E_1}{k_B T}}} = e^{-\frac{(E_2 - E_1)}{k_B T}}\end{aligned}$$

Da die Atome von einem Photon angeregt werden, ist die Energiedifferenz $E_2 - E_1 = h\nu$.

Man kann nun $w(\nu, T)$ isolieren:

$$w(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B_{12} \cdot e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - B_{21}}$$

Zuletzt müssen nun die Konstanten A_{21} , B_{12} und B_{21} bestimmt werden. Dafür betrachtet man die Grenzfälle der Energiedichte.

Für $T \rightarrow \infty$ ist bekannt, dass $w(\nu, T) \rightarrow \infty$. Damit dies für die obige Gleichung eintreten kann, muss der Nenner $= 0$ werden, denn A_{21} ist konstant und > 0 .

Wegen $e^{\frac{1}{\infty}} = 1$ muss also $B_{12} = B_{21}$ für alle Temperaturen gelten (im Falle sogenannter „nicht-entarteter Energiezustände“), denn die Koeffizienten sind Konstanten.

Für kleine Frequenzen mit $h\nu \ll k_B T$ und damit kleine Energien muss das Rayleigh-Jeans-Gesetz wieder richtig sein mit

$$w(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T.$$

In der unbestimmten Gleichung

$$w(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B \cdot (e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1)}$$

wird $e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \simeq 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$ und die Gleichung wird zu

$$w(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B \cdot \frac{h\nu}{k_B T}} = \frac{A_{21}}{B \cdot h\nu} \cdot k_B T$$

Also muss gelten

$$\frac{A_{21}}{B \cdot h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Leftrightarrow \frac{A_{21}}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

Durch Ersetzen von $\frac{A_{21}}{B}$ folgt die Planck'sche Strahlungsformel.

$$w(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Außerdem folgt das Kirchhoff'sche Gesetz (Emission \sim Absorption):

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

4 Laser

Ein Laser (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) wird dazu genutzt, extrem stark gebündeltes Licht zu erzeugen, das zudem nahezu monochromatisch ist und hohe Kohärenz aufweist.

Der erste „Laser“ entstand 1955 (durch Gordon, Zeiger und Townes) und sendete noch Mikrowellen (daher auch die alternative Bezeichnung „Maser“) mit Hilfe eines Ammoniak-Kerns aus. 1960 erschuf Maiman den ersten Laser für den sichtbaren Spektralbereich (Rubin-Kern) und 1965 wurde der Nobelpreis an Charles Townes verliehen.

4.1 Schematischer Aufbau

Jeder Laser besitzt mindestens folgende drei Bestandteile:

Aktives Medium. Das aktive (Laser-)Medium enthält angeregte Atome, die auf ein energetisch günstigeres Niveau fallen und dabei Photonen aussenden. Dies können Kristalle, Gase, Halbleiter oder auch Farbstoffmoleküle sein.

Energiepumpe. Dem Medium muss Energie zugeführt werden, um wieder Atome anzuregen bzw. möglichst viele Atome gleichzeitig im energiereichen Niveau zu haben. Es muss im aktiven Medium sogenannte **Besetzungsinversion** herrschen, d.h. im Gegensatz zur Besetzung im thermischen Gleichgewicht (energiearme Zustände stark besetzt) müssen die energiereichen Zustände stärker besetzt werden.

Resonator. Der aktive Bereich wird vom Resonator umschlossen, oft hat dieser an den Enden wellenlängenabhängige Spiegel. Der Resonator hat die Aufgabe, die gewünschte Wellenlänge im Laser zu halten und so die „Photonenlawine“ zu begünstigen, indem viele Photonen auf wenige Moden konzentriert sind.

Letztlich findet man wieder die drei Einsteinschen Übergänge für 2-Niveau-Systeme wieder:

Absorption B_{12} : Ein durch die Pumpe angeregtes Atom wechselt in einen energetisch höheren Zustand.

spontane Emission A_{21} : Ein Atom gibt Energie als ein einzelnes Photon ab. Der Vorgang heißt **Fluoreszenz** und macht sich als „Rauschen“ der Laser-Intensität bemerkbar.

induzierte Emission B_{12} : Jedes Photon sorgt dafür, dass angeregte Atome im Medium weitere Photonen mit gleicher Richtung, Phase und Wellenlänge aussenden. Eine Photonlawine entsteht.

4.2 Ratengleichung und Laserbedingung

Wie beim schwarzen Strahler gilt für die absoluten Anzahlen von Absorptionen bzw. Emissionen:

$$\frac{dn}{dt} = B \cdot N_2 \cdot n - B \cdot N_1 \cdot n + A \cdot N_2 - \frac{n}{t_0}$$

Hier ist n die Gesamtzahl der Photonen im Medium, $\frac{1}{t_0}$ sind die verlorenen Photonen pro Zeiteinheit (etwa durch Abstrahlung von Laserlicht oder Absorption an den Wänden).

Für B gilt folgender Zusammenhang:

$$B = \frac{1}{V \cdot \Delta\nu \cdot \tau \cdot n_D},$$

wobei V das betrachtete Volumen, $\Delta\nu$ die spektrale Breite für Emissionsvorgänge der Form $2 \rightarrow 1$, τ die durchschnittliche Lebensdauer des Energiezustandes 2 und n_D die spektrale Modendichte ist, also

$$n_D = 8\pi \frac{\nu^3}{c^3}.$$

Nach Kirchhoff (Absorption \sim Emission) ist

$$A = 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3} B = \frac{h\nu}{V \cdot \Delta\nu \cdot \tau}$$

Vernachlässigt man das durch spontane Emission entstehende „Rauschen“ und betrachtet die anfängliche Differentialgleichung für große Photonenzahlen n , vereinfacht sie sich zu

$$\frac{dn}{dt} = B(N_2 - N_1)n - \frac{n}{t_0}.$$

Um überhaupt den Laserprozess in Gang zu setzen, muss $\frac{dn}{dt} > 0$ sein. Dies ist erfüllt für

$$\frac{N_2 - N_1}{V} > \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu\tau}{c^3 t_0},$$

die sogenannte **Laser-Bedingung**. In $N_2 - N_1 > 0$ findet man auch die **Besetzungsinversion** wieder.

Man sieht also, dass Laservorgänge desto einfacher in Gang zu bringen sind, je geringer die Verlustrate ist (durch gute Spiegel realisierbar) und je kleiner die Spektralbreite der Photonen ist.

4.3 Dynamik

Wenn Energie in ein Lasermedium gepumpt wird, wie verändern die Energieniveaus im Laser ihre Besetzung? Gibt es einen stationären Zustand, der durch das Pumpen aufrechterhalten wird?

Man betrachte für das Beantworten dieser Fragen ein System aus drei Energieniveaus, E_0 , E_1 und E_2 mit den jeweiligen Besetzungshäufigkeiten N_0 , N_1 und N_2 . Für die Energien gilt $E_2 > E_1 > E_0$.

Das Pumpen soll Atome vom Zustand E_0 nach E_2 befördern. Das Lasing soll dann zwischen den Zuständen 1 und 2 erfolgen. Damit die Besetzungsinversion hier leicht herzustellen ist, soll Zustand 1 instabil sein und schnell in Zustand 0 zurückfallen.

Die beim Übergang $2 \rightarrow 1$ produzierten Photonenlawinen haben dann die Wellenlänge $\lambda = \frac{h \cdot c}{E_2 - E_1}$.

Die entsprechenden erweiterten Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt} &= BN_1 n - BN_2 n + b_{02}N_0 - b_{21}N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} &= BN_2 n - BN_1 n + b_{21}N_2 - b_{10}N_1 \\ \frac{dN_0}{dt} &= b_{10}N_1 - b_{02}N_0\end{aligned}$$

n bezeichnet wieder die Anzahl der Photonen im Laser. b_{21} ist hier ein weiterer sogenannter *nichtstrahlender Rekombinationsprozess*, die Energie wird dabei in Wärme umgewandelt. Diesen Prozess gibt es auch für b_{20} , aber er ist dort selten genug, dass er vernachlässigt werden kann.

Durch die kurze Lebensdauer des Niveaus E_1 kann man außerdem $N_1 \simeq 0$ nähern. Man erhält dann:

$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt} &= -BN_2 n + b_{02}N_0 - b_{21}N_2 \\ \frac{dn}{dt} &= BN_2 n - \frac{n}{t_0}\end{aligned}$$

Und im stationären Zustand, in dem die linken Seiten $\frac{dn}{dt}$ und $\frac{dN_2}{dt}$ Null sein sollen:

$$N_2 = \frac{1}{B \cdot t_0}$$

Für den stationären Zustand ist die Photonenzahl dann:

$$n = \frac{b_{21}}{B} \left(\frac{b_{02}}{b_{21}} N_0 B t_0 - 1 \right)$$

Dies ist eine lineare Gleichung mit einer Nullstelle bei $b_{02} = \frac{b_{21}}{N_0 B t_0}$. Die Interpretation ist, dass also erst ab einer bestimmten Schwellpumpleistung überhaupt Laserlicht induziert wird und die Intensität danach linear ansteigt.

In der Praxis gibt es vor der „Nullstelle“ auch schon einen verschwindend geringen linearen Anstieg. Dies ist das „Rauschen“ der hier vernachlässigten spontanen Emission.

4.4 Aufbau von Lasern

Festkörperlaser (Rubin). Festkörperlaser bestehen meist aus einem Kristall, der optisch, d.h. durch ungeordnete Photonen, gepumpt wird. Dies passiert beim Rubinlaser in Form einer weißen Blitzlampe. Der Rubinlaser ist kein 2-Niveau-Laser. Dies wäre auch nicht sinnvoll, da für eine Anregung zwischen 2 Niveaus immer nur eine bestimmte Wellenlänge funktioniert (diskrete Niveaus) und so fast die gesamte Intensität des Weißlichts verschwendet wäre. Da der Rubin ein Feststoff ist, der auch „mechanisch“ angeregt sein kann, dh. durch Eigenschwingungen der Atome, gibt es statt diskreter Energieniveaus Energiebänder mit endlicher Breite. Aus diesen Bändern fallen dann Atome zurück auf ein definiertes, mittleres Niveau E_1 ; vom diesem aus wird dann eine Photonenlawine durch Zurückfallen auf E_0 induziert. Lasing wäre hier nicht möglich, wenn E_1 ein Energieband wäre (unterschiedliche Wellenlängen, keine Resonanz). Der Rubin-Laser ist ein Impulslaser.

Gas-Laser (HeNe, Ar, CO₂, N₂, Excimer). Beim HeNe-Laser brennt eine Gasentladung, die das Helium in zwei metastabile Zustände anregt, 2^1S_0 und 2^3S_1 . Diese Niveaus sind nicht der Grundzustand, können aber auch kein Photon aussenden, da es keine „Nachfolgezustände“ gibt, die entsprechend $\pm\hbar$ mehr Spin haben.

Das Helium kann die Energie deshalb nur durch Stöße mit Neon-Atomen weitergeben. Dort gibt es neben den Niveaus $5s$ und $4s$ auch die Niveaus $5p$ und $4p$, die eine Drehimpuls-Differenz von $\pm\hbar$ aufweisen. Beim Übergang von $5s$ auf $5p$ bzw. von $4s$ auf $4p$ findet das eigentliche Lasing statt.

Beim Lasing mehrerer Wellenlänge kann man durch den Abstand der Spiegel die Resonanzwellenlänge bestimmen. Dies kann auch variabel verstellbar sein. Alternativ kann man ein Prisma einbauen und so drehen, dass die gewünschte Wellenlänge senkrecht in einen Spiegel gebrochen wird.

Der HeNe-Laser ist ein cw-Laser (kontinuierlich), der N₂ hingegen bspw. nicht.

Farbstofflaser. Große Farbstoffmoleküle, die in Flüssigkeit gelöst sind, werden optisch gepumpt und speichern Energie in Schwingungen und Rotationen. Wird diese Energie spontan wieder emittiert, folgt ebenfalls eine Photonenlawine.

Halbleiterlaser. Zwischen einem p-dotierten und einem n-dotierten Material wird eine Grenzschicht, ein Kristall, eingelassen. Anschließend fließt ein Strom vom p-Bereich in Richtung des n-Bereiches, quer durch die Grenzschicht. Beim Übergang der Elektronen von n nach p „springen“ diese dann über die Grenzschicht in die Löcher im p-Bereich und verlieren dabei Energie, da sie im Spannungspotential zwischen p und n „herunterfallen“. Diese Energie wird seitlich aus dem Kristall ausgesendet und wie bei anderen Lasern verstärkt, der Kristall ist hier das aktive Medium. Der Übergang zwischen Kristall und p- und n-Bereich wirkt spiegelnd. Solche Laser werden etwa in CD-Laufwerken eingesetzt und haben einen Wirkungsgrad von $\sim \frac{1}{10} \frac{\text{W}}{\text{A}}$, also 1W Sendeleistung pro 1A Durchflussstrom.

5 Elektronenphysik

5.1 Einführung

Nachdem bekannt war, dass es eine kleinste Elementarladung e gibt, die jeweils von einem *Elektron* transportiert wird, wurde nach dem genauen Wert von e gesucht, sowie nach der Masse m_e des Elektrons. Die Masse ist sehr klein, das Elektron selbst wird immer noch als punktförmig angenommen.

Eigenschaften des Elektrons lassen sich daher fast nur über seine Wechselwirkungen in elektromagnetischen Feldern messen.

Dies sind die Coulomb-Kraft

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$

und die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = Q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Die Lorentzkraft sorgt dafür, dass ein Elektron im homogenen Magnetfeld eine Kreisbahn bzw. Spirale durchläuft. Die dafür notwendige Bedingung für die Zentralkraft ist

$$F_z = \frac{mv^2}{r} = F_L.$$

5.1.1 Verhältnis $\frac{e}{m}$ beim Elektron: Thomson

1897 bestimmte J.J. Thomson in seinem Versuch das Verhältnis der beiden oben genannten Kräfte und damit auch das Verhältnis der Elementarladung zur Elektronenmasse. Im Versuch durchquert ein Elektron mit einer bekannten Geschwindigkeit ein Volumen, das gleichzeitig mit einem homogenen elektrischen Feld und einem homogenen Magnetfeld umgeben ist. Realisieren lässt sich dies mit Hilfe von Kondensatorplatten und Spulen.

Thomson ließ das Elektron, das im Volumen über einen Weg der Länge l abgelenkt wurde, seinen Weg fortsetzen und auf einem Schirm gemessen werden. Dort war eine Parabel zu sehen.

Durch die Kondensatorplatten soll eine Beschleunigung in y -Richtung erzeugt werden. Dabei wird Energie übertragen. Die Beschleunigung ergibt sich zu:

$$\ddot{y} = \frac{eE}{m_e}$$

In x -Richtung herrscht Ablenkung durch das B -Feld über die Lorentzkraft. Da diese immer senkrecht zur Flugrichtung ist, wird hier keine Energie übertragen, das Elektron legt unter Einfluss des B -Feldes einen Weg mit konstanter Krümmung zurück. Das Kreissegment, das die Bahn des Elektrons beschreibt, ist dadurch etwas länger als l . Die Differenz ist jedoch vernachlässigbar.

Die Beschleunigung in x -Richtung ist:

$$\ddot{x} = \frac{eBv}{m_e}$$

Werden beide Größen integriert und miteinander ins Verhältnis gesetzt, ergibt sich die Parabel:

$$y = \frac{2mE}{e l^2 B} x^2$$

Da l , E und B bekannte Größen sind, fand Thomson das Verhältnis $\frac{e}{m}$ als:

$$\frac{e}{m} = 1,7588 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

5.2 Ladung des Elektrons (Millikan)

Millikan bestimmte 1911 als erster die Ladung des Elektrons ausreichend exakt. Dafür hat er geladene Öltröpfchen in einen luftgefüllten, isolierten Behälter gesprüht und ihr Verhalten im elektrischen Feld gemessen, das den Behälter durchsetzt hat.

Ein Öltröpfchen habe den Radius R , die Ladung q , die Masse m und die Geschwindigkeit v innerhalb des Behälters.

Dann wirken folgende Kräfte auf das Öltröpfchen:

$$\begin{aligned} F_{\text{el}} &= qE \\ F_{\text{G}} &= mg \\ F_{\text{Auf}} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g \cdot \rho_{\text{Luft}} \\ F_{\text{Stokes}} &= 6\pi\eta Rv \end{aligned}$$

Zunächst musste die Masse m des Tropfens bestimmt werden, die von seinem Radius abhängt. Dafür werden Gewichtskraft, Auftrieb und die Stokes-Reibung gleichgesetzt.

Stellt sich hier ein Kräftegleichgewicht ein, so fällt das Öltröpfchen mit konstanter Sinkgeschwindigkeit v im feldfreien Behälter herab.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g \cdot (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) = 6\pi\eta Rv$$

Da v leicht messbar ist und g , ρ und η (Viskosität der Luft) jeweils bekannt sind, lässt sich R errechnen.

Damit ergibt sich:

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot g \cdot \rho_{\text{Öl}}$$

Als nächstes wurde das elektrische Feld im Behälter so eingestellt, dass das Öltröpfchen exakt in der Schwebe gehalten wurde ($v = 0$). Dann fällt die Reibungskraft weg und für die Kräfte gilt:

$$qE = mg$$

Die vielfache Wiederholung des Versuchs und die Beobachtung vieler Öltröpfchen durch Millikan ergab, dass die Ladung q stets ein geringes ganzzahliges Vielfaches einer konstanten Elementarladung war.

Dies ist die Ladung des Elektrons:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$$

Nach Thomson lässt sich damit auch die Masse ermitteln:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$$

5.3 Feldemission (Feldemissionsmikroskop)

Demtröder III, 22.

Mit der sogenannten Feldemission lässt sich eine atomare Struktur stark vergrößert auf einem Leuchtschirm darstellen. Hierbei fließen Elektronen durch einen Leiter. An den Leiter angeschlossen ist eine schmale Spitze aus Wolfram, sie stellt eine Kathode dar. Eine Anode ist in einiger Entfernung positioniert, oder der Schirm wird direkt als Anode benutzt.

Zwischen Kathodenspitze und Anode herrscht eine Spannung U . Da für das elektrische Feld $E = \frac{U}{d}$ gilt, herrscht direkt in der Spitze ein hohes Feld. Anschaulich sind die Feldlinien einer Punktladung sehr dicht, wenn man nahe genug an der Punktladung misst.

Beispiel: Für $U = 10^4$ V und $r = 10\mu m$ ist $E = 10^{10} \frac{V}{m}$. Bereits $2 - 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$ reichen für einen Durchschlag (Ionisierung) in Luft aus, ab $10^9 \frac{V}{m}$ verlassen Elektronen die Wolframspitze. Sie fallen anschließend im elektrischen Feld in Richtung des Schirms. Dieser Vorgang ist die *Feldemission*.

Auf dem Schirm sind helle und dunkle Flecken sichtbar. Je heller ein Fleck ist, desto mehr Elektronen wurden an der entsprechenden Stelle auf der Spitze herausgelöst, desto geringer war dort also die Austrittsarbeit.

Das Vergrößerungsverhältnis M ergibt sich über die Strahlensätze direkt zu $\frac{R}{r}$, wobei R der Schirmabstand ist und r der Spitzenradius.

Damit ist es möglich, Verunreinigungen auf der Spitze, z.B. Barium-Atome, als kleine helle Lichtblitze auf dem Schirm zu beobachten, da die Elektronen hier eine geringere Austrittsarbeit haben.

Die Vergrößerung auf dem Schirm ist im Bereich 10^5 bis 10^7 .

5.4 Elektronenbeugung

De Broglie vertrat 1923 die Ansicht, dass nicht nur klassische Wellen Teilchencharakter haben können (Photonen), sondern auch klassische Teilchen Wellencharakter. Er ordnete jedem Teilchen eine äquivalente Wellenlänge zu, die sogenannte **De-Broglie-Wellenlänge**. Sie errechnet sich aus dem Impuls des Teilchens:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Stehende Teilchen haben also eine Wellenlänge von unendlich, die entsprechenden Wellen breiten sich nicht aus.

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Der Impuls des Teilchens ist also proportional zum Wellenvektor. Diese Gleichung gilt auch für den Photonenimpuls, denn:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{\hbar \cdot 2\pi \cdot \nu}{c} = \frac{\hbar \cdot \omega}{c} = \hbar k$$

1926 wurde das Resultat zum ersten Mal durch Davisson und Germer in der Praxis bestätigt. Im Experiment wurden Elektronen in der Kristallstruktur von Nickel gebeugt und zeigten Interferenzeigenschaften.

1956 haben Möllenstedt und Düker die Elektronenbeugung am Biprisma beobachtet.

Der Grund für die späte Entdeckung der Teilcheninterferenz ist die kleine Wellenlänge der Teilchen und die dafür erforderlichen kleinen beugenden Strukturen im pm- bis nm-Bereich (etwa Bragg-Reflexion an Atomen im Kristall).

Die kinetische Energie eines Elektrons, das durch eine Beschleunigungsspannung U läuft, ist $e \cdot U$ und seine Wellenlänge damit:

$$\lambda_{el} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot e \cdot U}}$$

5.5 Materiewellen

Demtröder III, 116.

Nicht nur Elektronen können Beugungsprozesse durchlaufen, sogar für große Moleküle, die *Fullerene*, die aus 60 Kohlenstoff-Atomen bestehen, wurden Welleneigenschaften nachgewiesen.

Wenn man den Ort des Teilchens nachmisst, ist es jedoch wieder an einem Punkt lokalisiert und überhaupt nicht mehr wie eine Welle.

Man stellte auch fest, dass Beugungsmuster sogar dann zu Tage treten, wenn immer nur ein einzelnes Teilchen nacheinander durch die beugende Struktur läuft, und demnach nicht zwei Teilchen miteinander interferieren können. Über längere Zeit ergibt sich trotzdem das Muster.

Die Erklärung für diese scheinbaren Widersprüche ist die sogenannte **Wahrscheinlichkeitswelle**.

Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Teilchen an einem Ort befindet. Sie breitet sich ebenso im Raum aus wie etwa Lichtwellen und kann dann überlagern.

Wird das Teilchen gemessen, etwa durch Aufprallen auf einen Schirm, generell durch eine Wechselwirkung mit einem anderen Teilchen, so fällt die Wahrscheinlichkeitswelle in sich zusammen und das Teilchen erhält einen Ort.

Die Wellenfunktion lautet:

$$\Psi(x, t) = C \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

und mit $p = \hbar k$ und $E = \hbar \omega$:

$$\Psi(x, t) = C \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

So ähnlich sieht die Wellenfunktionen für Licht und für Teilchen auch aus, sie haben einen entscheidenden Unterschied: Die **Dispersion**. Allgemein beschreibt der Begriff der Dispersion eine Wellenlängenabhängigkeit.

Der bekannteste Dispersionseffekt ist das Brechen verschiedener Farben an einem Prisma unter verschiedenen Winkeln.

Im Fall der Materiewellen ist es die *Phasengeschwindigkeit*, die von der Wellenlänge bzw. der Frequenz abhängt.

Für die Bestimmung der Phasengeschwindigkeit leitet man die Phase ab und setzt sie Null:

$$0 = \frac{d}{dt}(\omega t - kx) = \omega - k \frac{dx}{dt} = \omega - k \cdot v_{Ph}$$

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k}$$

Wegen $k = \frac{\omega}{c}$ ist für Licht immer $v_{Ph} = c$!

Für Materie ist dies jedoch nicht der Fall. Für beide Arten von Wellen ist

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

für Materie ist aber auch

$$E = m_0 c^2 + E_{kin} = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} = m_0 c^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

und damit die Kreisfrequenz:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m_0}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist hier nicht konstant c , sondern

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m_0}$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_G einer Welle ist definiert als

$$v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Wie man an der obigen Formel für die Phasengeschwindigkeit sieht, ist die Gruppengeschwindigkeit für Materie $\neq 0$. Bei Licht hingegen ist ω konstant und v_G damit Null.

Für Materie ist

$$v_G = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m_0} = \frac{p}{m_0} = v_T$$

Also ist die Teilchengeschwindigkeit v_T gleich der Gruppengeschwindigkeit der entsprechenden Materiewelle. Diese Unterscheidung ist wichtig, da für Materiewellen die formale Phasengeschwindigkeit durchaus größer als c werden kann. Dies ist jedoch kein Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die Signalausbreitung mit der Gruppengeschwindigkeit geschieht.

Einer Welle lässt sich kein fester Ort zuordnen. Um überhaupt über den Ort eines Teilchens zu einem Zeitpunkt reden zu können, betrachten wir nicht beliebige Materiewellen, sondern stets sogenannte **Wellenpakete**. Damit ein Wellenpaket außerhalb eines bestimmten Ortsbereiches Null wird, müssen unendlich viele Frequenzen überlagert werden.

Jedoch erkannte **Max Born** um 1927, dass die Wellenfunktion nur statistisch gedeutet werden kann: Eine Amplitude ist eine komplexe Größe, und auch ein endliches Wellenpaket dehnt sich durch die Dispersion immer weiter aus. Auch kann ein Teilchen sich nicht im Doppelspalt aufteilen, sondern die *Wahrscheinlichkeit*, durch einen der Spalte zu treten, verteilt sich.

Er nannte die Materiewelle also **Wahrscheinlichkeitswelle**.

Genauer ist

$$|\Psi(x, t)|^2$$

die Wahrscheinlichkeit für den Ort x zur Zeit t . Da Wahrscheinlichkeiten in der Summe immer 1 ergeben, gilt:

$$\int_V |\Psi(x, t)|^2 dV = 1$$

Eine Wellenfunktion, die diese Bedingung erfüllt, ist eine *normierte Wahrscheinlichkeitswelle*.

Das Wellenpaket hat dann zu jedem Zeitpunkt eine endliche Ausdehnung Δx , die immer positiv ist. Dies deutet schon an, dass der Ort eines Teilchens immer nur statistisch gemittelt werden kann und eine inhärente Unschärfe besitzt.

5.5.1 Heisenberg'sche Unschärferelation

Demtröder III, 101.

Betrachte ein Wellenpaket im eindimensionalen Raum, in dem die Einhüllende der Amplituden eine Gauß-Kurve beschreibt.

Das Wellenpaket soll den Raum Δx einnehmen. Seine spektrale Breite ist Δk . Dann gilt für Pakete mit Gauß-Verteilung:

$$\Delta x \cdot \Delta k = 1$$

Die Ausdehnung des Wellenpaketes hängt also direkt mit der Ausdehnung seiner Fourier-Transformierten zusammen. Mit

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

ergibt sich die **Heisenberg'sche Unschärferelation**:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$$

Man kann zeigen, dass das Produkt aus Orts- und Impulsunschärfe für Gauß-Verteilungen bereits minimal ist. Für allgemeine Wellenpakete gilt also:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar.$$

Die rechte Seite der Ungleichung hängt stark von den anfänglichen Definitionen ab. Je nachdem, wie die „Breite“ des Wellenpaketes definiert ist (Amplitude klingt auf das $\frac{1}{\sqrt{e}}$ -fache, $\frac{1}{e}$ -fache oder auf 0 ab), kann die rechte Seite \hbar , $4\hbar$ oder h sein.

Die Unschärferelation ist im Einklang mit bisherigen Experimenten. Sie kann beispielsweise die Elektronenbeugung am Einzelspalt mit dem Teilchenmodell erklären. Wird der Raum, in dem ein bewegtes Teilchen sich aufhalten kann, durch einen Spalt auf die Breite Δx eingeschränkt, so hat sein Impuls in x -Richtung automatisch eine höhere Unschärfe. Diese Unschärfe Δp_x in Richtung parallel zum Spalt führt zu einer Veränderung der Flugbahn bis hin zu einem gewissen maximalen Winkel, der durch Δp_x vorgegeben ist. Die Theorie stimmt mit den bekannten Beugungsgesetzen überein.

Weitere quantenmechanisch zueinander komplementäre Größen sind Energie und Zeit. Wird ein Wellenpaket mit konstanter Amplitude und spektraler Breite $\Delta\omega$ an einem Ort x_0 gemessen, so braucht es die Zeit

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

um über den Messort hinwegzulaufen.

Daraus folgt

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi$$

und mit $E = \omega\hbar$ auch

$$\Delta E \cdot \Delta t = h$$

Um die Energie eines Wellenpaketes exakt ($\Delta E = 0$) messen zu können, müsste man es also unendlich lange beobachten.

Ist die Amplitude wieder gauß-verteilt und nicht konstant, so steht auf der rechten Seite wieder ein \hbar .

6 Quantenstruktur der Atome

Einführung

Ein Atom kann Energie nicht in beliebiger Menge aufnehmen, sondern nur auf bestimmte diskrete Niveaus angeregt werden.

Dass ein Atom nur diskrete Energien aufnehmen kann, wird besonders gut bei Stoßprozessen sichtbar, wie etwa im Franck-Hertz-Versuch.

Der Franck-Hertz-Versuch basiert seinerseits auf dem Lenard-Versuch.

6.0.2 Lenard-Röhre

Eine Kathode emittiert Elektronen im Inneren einer gasgefüllten Röhre mit geringem Gasdruck. Die Anode besteht aus einem metallenen Gitter, zwischen Anode und Kathode herrscht die Spannung U_1 , damit werden die Elektronen auf die Energie eU_1 beschleunigt.

Hinter dem Gitter befindet sich ein weiterer negativer Pol, so dass eine Bremsspannung U_2 auf die Elektronen wirkt. Wird die Bremsspannung gleich groß der Beschleunigungsspannung gewählt, $U_1 = U_2$, so erreicht kein Elektron den zweiten negativen Pol. Im Gegenteil, ab einer bestimmten Spannung $U_1 \geq U_i$ wird stattdessen ein positiver Strom I zwischen Gitter und dem zweiten negativen Pol gemessen und I steigt mit höheren Spannungen weiter an.

Die Erklärung ist die folgende: Einige Elektronen durchtreten das Gitter ungehindert (siehe Rutherford-Versuch) und treffen unmittelbar hinter dem Gitter auf ein Gasatom. Dabei haben sie noch so viel kinetische Energie, dass sie das Atom durch den inelastischen Stoß ionisieren. Die Gasatome selbst sind zu groß für das Gitter. Die Folge ist, dass die Elektronen zurück zum Gitter wandern, das schwere positive Ion jedoch im zweiten elektrischen Feld gemächlich zum zweiten negativen Pol wandert und dort die Ladungsänderung um $+e$ verursacht.

6.0.3 Franck-Hertz-Versuch

Der Aufbau beim Franck-Hertz-Versuch ist ähnlich der Lenard-Röhre. Als Gas wurde Quecksilberdampf (Hg) mit einem Druck von 10^{-2} mbar verwendet. Jedoch war die Bremsspannung nicht in der Größenordnung der Beschleunigungsspannung, sondern deutlich kleiner, so dass durchaus Elektronen die gesamte Röhre durchqueren und in den hinteren Pol eintreten konnten.

Eigentlich müsste also dieselbe monoton ansteigende Kurve für I gemessen werden wie bei Lenard — dies war jedoch nicht der Fall. Stattdessen gibt es bei einer bestimmten Spannung ein Maximum, nach dem die Stromstärke wieder abnimmt bis zu einem Minimum. Dann steigt sie wieder auf ein neues, diesmal etwas höheres Maximum. Dieses Muster wiederholt sich unendlich oft.

Woher kommen die Minima?

Die Elektronen stoßen auf ihrer Flugbahn gelegentlich auf Hg-Atome. Hat das Elektron dabei die richtige Energie, so regt es das Atom an, gibt also einen Teil seiner Energie

ab. Ein Elektron des Atoms befindet sich dann auf einem höheren Niveau, ohne herausgeschlagen zu werden. Bei einem inelastischen Stoß wird das Elektron langsamer und erreicht die andere Seite der Röhre nicht mehr. Wird die Spannung weiter erhöht, so können aber auch diese Elektronen wieder kinetische Energie sammeln und der gemessene Strom steigt wieder an. Ab einer weiteren Schwellspannung haben die Elektronen genug Energie, um bei einem zweiten inelastischen Stoß wieder ein Gasatom anzuregen, und so weiter. Die Minima und Maxima werden mit höheren Ordnungen größer, da die Wahrscheinlichkeit für $n + 1$ Stöße kleiner ist als die für n Stöße.

Da die Elektronenmasse sehr klein ist im Vergleich zur Masse eines Hg-Atoms, gibt es in elastischen Stößen auch nur vernachlässigbar wenig Energie ab, so dass die gemessene Kurve alleine auf die inelastischen Stöße zurückzuführen ist.

Bei Quecksilber sind die Spannungsdifferenzen zwischen zwei Maxima bzw. zwischen zwei Minima etwa 4,9V. $e \cdot 4,9 \text{ V}$ ist also die Energie eines angeregten Niveaus des Quecksilbers, entsprechend ist $\lambda = h \cdot c / E$ die Wellenlänge des Lichtes, das die Atome bei der Relaxation aussenden.

Andersherum könnten die Atome auch von Photonen statt von Elektronen angeregt werden: Emissions- und Absorptionswellenlängen bilden stets das gleiche Spektrum, basierend auf den Energieniveaus, die ein Atom besitzt. Der Franck-Hertz-Versuch zeigt eindeutig, dass diese diskreten Niveaus existieren.

6.1 Das Wasserstoff-Atom

Um die Struktur der Atome zu untersuchen, eignet sich das einfachste Atom am besten: Das Wasserstoff-Atom.

Zuerst war es **Ångström**, der 1853 eine Spektrallinie des Wasserstoffs entdeckte, d.h. eine vom Wasserstoffatom absorbierbare und emittierbare Wellenlänge. Als weitere Spektrallinien entdeckt wurden, bekam diese erste Wellenlänge den Namen H_α :

$$H_\alpha = 656,28 \text{ nm} = 6562,8 \text{ Å}$$

Ångström zu Ehren wird die Einheit Å mit $1 \text{ Å} = 10 \text{ nm}$ verwendet.

Erst viel später, 1885, wurden weitere Spektrallinien von **Balmer** entdeckt, die sogenannte *Balmer-Serie* der Wasserstofflinien:

$$H_\alpha = 656,28 \text{ nm}$$

$$H_\beta = 486,1 \text{ nm}$$

$$H_\gamma = 434 \text{ nm}$$

$$H_\delta = 410,17 \text{ nm}$$

$$H_\epsilon = 397 \text{ nm}$$

...

Er erkannte, dass die Wellenlängen folgender Formel gehorchen:

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4} \cdot G$$

mit $G = 364,56 \text{ nm}$. Er wusste jedoch keine Erklärung dafür.

1889 verallgemeinerte **Rydberg** die Formel:

$$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ bezeichnet die **Wellenzahl** in der Einheit „Anzahl Wellenperioden pro Meter“. Sie hat den gleichen Namen wie k , welche mit der Einheit „Phase pro Meter“ treffender als *Kreiswellenzahl* bezeichnet werden müsste und gelegentlich wird.

Es gilt $R_H \simeq 10^5 \text{ cm}^{-1}$.

Es gibt auch eine Erweiterung wie folgt:

$$\bar{\nu} = Z^2 \cdot R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Z ist hier die Kernladungszahl. Diese Formel gilt auch für andere Atome mit mehr als einem Proton im Kern, diese Atome müssen jedoch *wasserstoffähnlich* sein, d.h. müssen bis auf ein einzelnes Elektron ionisiert worden sein, etwa He^+ oder Li^{++} .

Aus der Rydberg-Formel folgt mit $m = 2$ wieder die Balmer-Serie, im Allgemeinen Fall gibt es für alle Paare m, n mit $n > m$ eine Spektrallinie.

Weitere Serien des Wasserstoffs sind:

$m = 1$ Lyman-Serie (1906)

$m = 2$ Balmer-Serie (1885)

$m = 3$ Paschen-Serie (1908)

$m = 4$ Brackett-Serie (1922)

$m = 5$ Pfund-Serie (1924)

m und n heißen **Hauptquantenzahlen** und beschreiben anschaulich, in welcher der „Bahnen“ um den Atomkern sich ein Elektron befindet. Da nur Sprünge zwischen diskreten Energieniveaus möglich sind, heißen die entsprechenden Nummern der Energieniveaus Quantenzahlen.

Die Sprünge zwischen den Energieniveaus lassen sich in einem **vereinfachten Termschema** illustrieren. (Demtröder III, 108.)

Beim Wasserstoff existiert mit $m = 1$ der *Grundzustand* mit einer potentiellen Energie von $-13,6 \text{ eV}$. Die emittierten Energien beim Fallen eines Elektrons auf das Niveau $m = 1$ entsprechen genau Photonen mit den Wellenlängen der Lyman-Serie. Beim Fallen auf das Niveau $m = 2$ (potentielle Energie $-3,45 \text{ eV}$) werden die Balmer-Wellenlängen emittiert, usw.

Beim Erreichen der potentiellen Energie 0 eV bei $m = \infty$ wird das Atom ionisiert.

6.2 Bohr'sche Postulate

Die erste Theorie, die die gemessenen Ergebnisse konsistent erklären konnte, lieferte Niels Bohr 1913 mit seinem **Planetenmodell**.

Im Bohr'schen Atommodell kreisen die Elektronen um den Atomkern ähnlich wie Planeten um die Sonne. Sie werden dabei von der elektrostatischen Coulomb-Kraft auf einer Kreisbahn gehalten.

Das entsprechende Kräftegleichgewicht lautet:

$$\frac{Ze \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

Warum sollten hier nur diskrete Bahnen möglich sein?

Bohr stellte sich vor, dass die Elektronen eine stehende Welle auf einer Kreisbahn bilden. Diese Vorstellung ist ebenfalls konsistent zu den später postulierten Materiewellen und bildet das **erste Bohr'sche Postulat**.

Auf der Kreisbahn mit Radius r kann ein Elektron mit De-Broglie-Wellenlänge λ_D nur existieren, wenn $2\pi \cdot r = n \cdot \lambda_D$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Der Radius lässt sich aus obigem Kräftegleichgewicht ableiten:

$$r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2}$$

Wegen $\lambda_D = \frac{h}{p}$ und $p = m_e v$ gilt

$$2\pi \cdot r = n \cdot \frac{h}{p} = n \cdot \frac{h}{m_e v},$$

also

$$r = n \cdot \frac{h}{m_e v \cdot 2\pi}$$

oder

$$v = n \cdot \frac{h}{m_e r \cdot 2\pi}.$$

Oben eingesetzt ist dann

$$r_n = \frac{Ze^2 m_e^2 r_n^2 4\pi^2}{4\pi\epsilon_0 m_e n^2 h^2} = \frac{Ze^2 m_e r_n^2 \pi}{\epsilon_0 n^2 h^2}$$

$$r_n = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{Ze^2 m_e \pi} = \frac{n^2}{Z} a_0.$$

Die Konstante $a_0 \simeq 0,5 \text{ \AA}$ ist der **Bohr'sche Radius**, der kleinste Radius einer möglichen Elektronenbahn um ein Wasserstoffatom.

Die dazugehörige Energie des Elektrons ergibt sich aus der Summe seiner kinetischen Energie und dem Coulomb-Potential:

$$E_n = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

Mit der Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn im Coulomb-Potential

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n m_e}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{m_e Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n m_e} - \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \\
 &= \frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{2Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} \\
 &= \frac{-Z e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} \\
 &= -R_H^* \cdot \frac{Z^2}{n^2}
 \end{aligned}$$

$$R_H^* = 13,6 \text{ eV} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

Die Energiesumme ist also negativ: Bei Energiezufuhr bis auf $E = 0$ wird das Atom ionisiert. Oben entspricht dies dem Grenzwert von $n \rightarrow \infty$ und damit $r_n \rightarrow \infty$.

Beschleunigte elektrische Ladung emittiert oder absorbiert elektromagnetische Strahlung, so auch Elektronen. Dies lässt sich aus den Maxwell-Gleichungen herleiten.

Träfe dieses aber auch für Elektronen zu, die an einen Kern gebunden sind, so würden diese Elektronen stetig durch die Zentripetalbeschleunigung Energie verlieren und in den Kern stürzen. Dies widerspricht aber der Realität.

Bohr erkannte dieses Problem und formulierte das **zweite Bohr'sche Postulat**: Die Bewegung der Elektronen auf ihren Bahnen erfolgt strahlungslos. Nur der Übergang zwischen den gequantelten Bahnen emittiert oder absorbiert Strahlung.

Dass das Elektron auf dieser Kreisbahn keine Strahlung abstrahlt, lässt sich mit dem klassischen Modell, d.h. den Maxwell-Gleichungen nicht erklären. Man kann aber zumindest veranschaulichen, warum die Atome trotzdem stabil sind: Aufgrund der Orts-Impuls-Unschärfe gilt, dass der Impuls p desto größere Unschärfe Δp besitzt, je kleiner die Ortsunschärfe ist. Je kleiner der Radius und damit die potentielle Energie ist, desto größer muss der Impuls und damit die kinetische Energie sein — der Impuls kann nämlich nicht kleiner als die Unschärfe sein, denn sonst hätte man wiederum eine kleinere Unschärfe.

Die Gesamtenergie aus potentieller und kinetischer Energie besitzt für das Wasserstoffatom ein Minimum, bei dem der Abstand vom Kern exakt dem Bohr'schen Atomradius a_0 entspricht, die minimale Energie entspricht genau der Energie des Grundzustands: $R_H = -13,6 \text{ eV}$.

Auch erkannte Bohr das so genannte **Korrespondenzprinzip**: Bei großen Bahnradien und großen Quantenzahlen gehen die Gesetze der Elektronenbahnen wieder in die der klassischen Physik über, die Quantelung verschwindet, da die Kreisbahnen sehr groß sind im Vergleich zur Wellenlänge der Elektronen.

Statt der Bahngeschwindigkeit

$$v = n \cdot \frac{h}{m_e r \cdot 2\pi}$$

kann man auch den Drehimpuls betrachten:

$$v \cdot m_e \cdot r = L = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar$$

Der Drehimpuls des Elektrons im Atom kann also nur in ganzzahligen Vielfachen von \hbar auftreten! Diese Charakterisierung ist äquivalent zur Einschränkung auf stehende Wellen.

Achtung: Der Drehimpuls des Elektrons in der „orbitalen Bahn“ ist nicht dasselbe wie der Eigendrehimpuls, der *Spin*. Dieser ist für das Elektron $\pm \frac{1}{2}\hbar$ und für das Photon $\pm \hbar$.

6.2.1 Bohr-Sommerfeldsches Atommodell

Betrachtet man die Spektrallinien der Wasserstoffs in höherer Auflösung, stellt man fest, dass die Linien sich in einige weitere Unterlinien unterteilen lassen. Dies ist die sogenannte **Feinstruktur** des Wasserstoffs.

Diese Linien sind mit dem Bohr'schen Modell nicht erklärbar. Dieses wurde daher von **Sommerfeld** 1915 erweitert. Sommerfeld nahm an, dass Elektronen mit gleicher Energie nicht unbedingt die gleiche Bahn besitzen müssen, insbesondere können Kreis- und Ellipsenbahnen mit gleicher Energie existieren, nur der Drehimpuls unterscheidet sich dabei. Um eine Ellipse zu beschreiben, sind im Gegensatz zum Kreis mehr als ein Parameter notwendig (etwa Länge der großen Halbachse). Die Form resultiert daher analog aus mehreren Quantenzahlen, während die Kreisbahn alleine durch die Hauptquantenzahl bestimmt wird.

Sommerfeld verallgemeinerte die Bohr'sche Quantisierungsbedingung für den Drehimpuls

$$L = n \cdot \hbar$$

zu

$$\oint p dq = n \cdot h,$$

der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung. Diese gilt für jede Koordinate q und den zu q gehörenden Impuls p . Für eine Kreisbahn, d.h. $p = L$ und $q = \varphi$ folgt wieder die Bohr'sche Quantisierung.

6.3 Quantentheorie

Im 20. Jahrhundert wurden mehrere Ansätze gesucht, um die Quantenmechanik auf eine mathematische Grundlage zu stellen.

Heisenberg'sche Matrizenmechanik. Eine abstrakte Definition über Hilberträume und quantenmechanische Operatoren.

Erwin Schrödingers Wellenmechanik. Stellt Teilchen durch Wellenfunktion von Wahrscheinlichkeitswellen dar: Die Lösungen der Schrödingergleichung.

Die Schrödingergleichung ist eine Differentialgleichung (Wellengleichung), die in verschiedenen Formen auftauchen kann.

Eindimensional, stationär (zeitunabhängig):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_{\text{pot}} \cdot \psi = E \cdot \psi$$

mit der Gesamtenergie $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$, $\psi = \psi(x)$.

Dreidimensional, zeitunabhängig:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + E_{\text{pot}} \cdot \psi = E \cdot \psi$$

für $\psi = \psi(\vec{r})$.

Dreidimensional, zeitabhängig:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + E_{\text{pot}} \cdot \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

für $\psi = \psi(\vec{r}, t)$.

Allgemein:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Lösungen der Schrödingergleichung müssen stets *normiert* sein, d.h. das Integral ihres reellen Quadrates über den Raum muss zu jedem Zeitpunkt 1 ergeben.

6.3.1 Anwendungen der Schrödingergleichung

Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. Ein Teilchen im Potentialkasten der Breite a ist wie eine stehende Welle kann daher nur diskret viele Energiezustände annehmen:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_0 a^2} n^2 = E_0 n^2$$

Kastenpotential mit endlichen Wänden. Das Teilchen kann ein Stückchen in das Potential eindringen, in dem es sich klassisch wegen zu wenig Energie nicht aufhalten kann. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude fällt mit der Eindringtiefe exponentiell ab. Dieser quantenmechanische Effekt führt zum **Tunneleffekt**. Eine direkte Messung im verbotenen Raum ist jedoch nicht möglich.

Bei Kastenpotentialen nehmen die Abstände zwischen zwei diskreten Energieniveaus quadratisch zu, in Parabolpotentialen (harmonischen Potentialen) sind sie äquidistant, in Coulomb-Potentialen nehmen die Abstände ab.

6.3.2 Operatoren

In der Quantenphysik lassen sich immer nur Erwartungswerte bestimmen, etwa den Erwartungswert für den Ort eines Teilchens.

Dieses wird geschrieben als

$$\langle \vec{r} \rangle = \int_V \psi^* \hat{r} \psi dV$$

Hier ist \hat{r} der *Operator* für den Ort, es ist $\hat{r} = \vec{r}$.

Der Operator für die Energie $\langle E \rangle$ ist hingegen:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V(\vec{r})$$

Hierbei ist Δ der Laplace-Operator und V die potentielle Energie.

Für den Impuls p_x ist der Operator

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

und für den Drehimpuls L_z

$$\hat{L}_z = xp_y - yp_x = i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}).$$

Allgemein lassen sich Operatoren und Erwartungswerte einer Größe A in Beziehung setzen:

$$\hat{A}\psi = \langle A \rangle \psi$$

Die (Wellen-)Funktion ψ ist dabei eine Lösung, wenn sie die Gleichung erfüllt, sie ist dann eine *Eigenfunktion* des Operators \hat{A} mit dem *Eigenwert* $\langle A \rangle$.

Zwei Größen A, B lassen sich nur dann gleichzeitig scharf messen, wenn ihre Operatoren \hat{A}, \hat{B} *vertauschbar* sind, d.h.

$$\hat{A}(\hat{B}\psi) = \hat{B}(\hat{A}\psi)$$

Für die Energie gilt die *Schrödingergleichung*:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Dieses ist die Kurzform für:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + E_{\text{pot}} \cdot \psi = E \cdot \psi$$

Dies ist die stationäre Schrödingergleichung. Hängt E von der Zeit ab, so ist die Zahl E zu ersetzen durch einen weiteren Operator,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Einsetzen liefert die zeitabhängige Schrödingergleichung. Wenn E_{pot} als Funktion selbst aber nicht von t abhängt, etwa in einem Coulomb-Potential, so lassen sich die beiden Hälften trotzdem separieren.

6.4 Lösungen der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom

Um die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons um den Atomkern abhängig von seiner relativen Position zu bestimmen (sein sogenanntes *Orbital*), löst man die stationäre Schrödingergleichung mit dem Coulomb-Potential und der klassischen kinetischen Energie des Elektrons.

Es ergeben sich abhängig von n jeweils n^2 Lösungen (Orbitale), die jedoch allesamt die gleiche Energie E_n besitzen (entartete Zustände). Jedem Zustand für ein n lassen sich alle Zustände mit $l < n$ und $-l \leq m \leq l$ zuordnen. Dabei ergeben die Summen der Orbitale für ein n wieder eine kugelsymmetrische Verteilung, weshalb man von der n -ten *Elektronenschale* spricht.

Eine Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom ergibt eine Wellenfunktion, die sich in einen *radialen* Anteil und einen sogenannten *Kugelflächenanteil* ausdrücken lässt:

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

Für den Zustand $l = 0$ (und damit $m = 0$), also für das s-Orbital, ist die Wahrscheinlichkeit nur vom radialen Anteil abhängig. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte ist kugelsymmetrisch.

Für p, d, ...-Orbitale sind die Y nicht-konstante Funktionen, so dass die Wahrscheinlichkeiten nicht mehr kugelsymmetrisch verteilt sind.

Als Energie ergibt sich aus den Lösungen jedoch immer, unabhängig von allen Quantenzahlen außer n :

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{8\varepsilon_0 h^2 n^2} = -R_y^* \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

Auch wenn aus Sicht der Schrödingergleichung die Zustände n^2 -fach entartet sind, unterscheiden sich die Energien geringfügig, da die Schrödingergleichung die Quantenzahlen l, m sowie den Elektronenspin nicht beachtet.

Eine vollständigere Beschreibung funktioniert nur über andere, schwierigere Theorien (Dirac-Theorie für relativistische Beschreibung, Quantenelektrodynamik, Heisenberg-sche Matrizenmechanik), oder über angenäherte Korrekturterme.

6.5 Normaler Zeeman-Effekt

Der Zeeman-Effekt ist die Aufhebung der Entartung der Energiezustände für verschiedene Quantenzahlen m im Fall von $l \geq 1$, indem ein äußeres \vec{B} -Feld angelegt wird. Der so genannte *normale* Zeeman-Effekt tritt dabei nur auf, wenn der Gesamtspin \vec{S} des beobachteten Systems Null ist (etwa Cadmium-Atome).

Das Elektron im Atom besitzt aufgrund seines Bahndrehimpulses ein magnetisches Moment μ_l . Dies kann mit einem halbklassischen Modell veranschaulicht werden, in dem das Elektron eine Kreisbahn mit der Frequenz ν um den Kern zurücklegt. Als Kreisstrom mit der Stromstärke $I = -e \cdot \nu$, der die Fläche $A = \pi r^2$ einschließt, gilt die Formel für magnetische Dipolmomente $\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$.

Wegen $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{r \cdot 2\pi}$ kann man I auch schreiben als

$$I = -e \cdot \frac{v}{r \cdot 2\pi}.$$

Also ist

$$\mu_l = (\pi r^2) \cdot \left(-e \cdot \frac{v}{r \cdot 2\pi}\right) = -\frac{e \cdot v \cdot r}{2}.$$

Weil der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ist, also

$$L = r \cdot m_e \cdot v,$$

folgt für μ_l :

$$\mu_l = \frac{-e}{2m_e} L = \gamma_l \cdot L$$

γ_l wird auch *gyromagnetisches Verhältnis des Elektrons* genannt. Das gyromagnetische Verhältnis ($\frac{\text{Hz}}{\text{T}}$) eines magnetischen Dipols bestimmt auch die Frequenz seiner Larmorpräzession im Magnetfeld:

$$\omega_P = \gamma \cdot B$$

Quantenmechanisch bewirkt das Einbringen in ein Magnetfeld eine Änderung der potentiellen Energie. Der Grund dafür ist, dass ein Dipolmoment dann minimale Energie besitzt, wenn es parallel zum Feld ausgerichtet ist.

$$\Delta E_{\text{pot}} = \hbar \omega_P = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B} = -\gamma_l \cdot \vec{L} \cdot \vec{B}$$

Während die Länge $|\vec{L}|$ des Drehimpulses durch die Quantenzahl l über

$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

festgelegt ist, sind seine Projektionen auf die einzelnen Achsen nicht wohldefiniert. Ausnahme ist hier eine einzelne willkürliche Achse z und deren Komponente L_z .

Diese ist ebenfalls quantisiert durch $L_z = m_l \hbar$ für Zahlen m_l , es gilt $-l \leq m_l \leq l$.

Die Achse z sei so gewählt, dass sie parallel zu \vec{B} ist, also $|\vec{B}| = B_z$: Tatsächlich führt \vec{L} eine Larmorpräzession um die z -Achse durch und die Projektion L_z ist dabei konstant.

Dann ist für $m_l = 0$ das magnetische Moment senkrecht zu \vec{B} und es erfolgt keine Energieverschiebung. Für allgemeine m erfolgt die Verschiebung:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{pot}} &= -\gamma_l \cdot \vec{L} \cdot \vec{B} \\ &= -\gamma_l \cdot L_z \cdot B \\ &= -\gamma_l \cdot \hbar \cdot m_l \cdot B \\ &= -\frac{-e}{2m_e} \cdot \hbar \cdot m_l \cdot B \\ &= \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar \cdot m_l \cdot B \end{aligned}$$

Man kürzt

$$\frac{\hbar \cdot e}{2m_e} = \mu_B$$

auch als **Bohr'sches Magneton** ab (Energieverschiebung in J pro Tesla) und erhält

$$\Delta E_{\text{pot}} = \mu_B \cdot m_l \cdot B$$

Sein Wert beträgt:

$$\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} = 5,788 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}.$$

Es ist automatisch das magnetische Moment eines Elektrons, das den Bahndrehimpuls \hbar ($l = 1$) besitzt.

Die Entartung der Energieniveaus wird also aufgehoben und für ein festes l erscheinen $2l + 1$ verschiedene Zustände mit verschiedenen m . Sie sind energetisch gesehen äquidistant, da die Energieverschiebung nur linear von m und B abhängt.

Trotzdem sind beim Zeeman-Effekt immer nur höchstens drei Spektrallinien sichtbar: Nur zwischen bestimmten (aufgespaltenen) Energieniveaus können Sprünge stattfinden und die Energiedifferenzen sind bei diesen Sprüngen auch immer die gleichen drei Werte. (Auswahlregel)

Genauer: Sprünge sind aufgrund des Photonenspins $s = \pm \hbar$ nur möglich für $\Delta l = \pm 1$. Außerdem muss gelten $\Delta m \in \{-1, 0, 1\}$. Dies entscheidet die Polarisation des emittierten Photons (σ^+ , π , σ^-).

Wird Licht parallel zu \vec{B} emittiert, so spaltet sich die Spektrallinie in zwei Linien auf, die σ^+ - und σ^- -Licht entsprechen. Für Licht senkrecht zu \vec{B} ergeben sich drei linear polarisierte Linien, von denen die innere senkrecht zu den beiden anderen polarisiert ist.

Dies lässt sich klassisch erklären: Die Bewegung des Elektrons um den Kern wird in drei Oszillatoren zerlegt:

- Eine lineare Schwingung („auf und ab“) in einer Raumrichtung parallel zu \vec{B} .
- Zwei gegenläufige zirkuläre Schwingungen („waagerecht“), die überlagert den Anteil der Gesamtbewegung ergeben, der senkrecht zu \vec{B} ist.

Auf die Anteile parallel zu \vec{B} wirkt nun keine Kraft. Die beiden Kreis-Oszillatoren senkrecht zu \vec{B} werden auf ihrer Kreisbahn nun beschleunigt bzw. gebremst und besitzen damit mehr bzw. weniger Energie. Bei Übergängen aus diesen Zuständen sind die Spektrallinien entsprechend verschoben.

Werden emittierte Photonen in Richtung von \vec{B} beobachtet, so schwingen diese in Blickrichtung, wenn sie vom zu \vec{B} parallelen Oszillator ausgehen. Sie sind dann nicht beobachtbar. Die beiden verschobenen Schwingungen dagegen werden als zirkulär polarisiertes Licht gemessen.

Wird dagegen in eine Richtung senkrecht zu \vec{B} beobachtet, so sind alle drei Oszillatoren messbar. Die zirkulären Schwingungen werden als „waagerechte“ Polarisation gemessen, die lineare als „senkrechte“.

6.6 Relativistische Korrektur

Für die Lösung der Schrödingergleichung wird die nichtrelativistische Energie

$$E = \frac{p^2}{2m_0} + E_{\text{pot}}$$

genutzt. Jedoch besitzt das Elektron im Bohr'schen Atommodell bereits eine Bahngeschwindigkeit von etwa 1% der Lichtgeschwindigkeit, auf Ellipsenbahnen (für kleine l) ist die Geschwindigkeit nahe dem Kern noch höher und damit die Abweichung.

Man benötigt für eine treffendere Beschreibung der Energie also die relativistische Gleichung

$$E = c \cdot \sqrt{m_0^2 \cdot c^2 + p^2} - m_0 c^2 + E_{\text{pot}},$$

die umgeformt werden kann in eine Reihenentwicklung

$$E = \left(\frac{p^2}{2m_0} + E_{\text{pot}} \right) - \frac{p^4}{8m_0 c^2} + \dots$$

Löst man die Schrödingergleichung hiermit, erhält man die **relativistische Korrektur**:

$$E = E_{\text{klass}} - \Delta E$$

mit der Energiedifferenz

$$\Delta E = -E_{\text{klass}} \cdot \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right).$$

α ist die so genannte **Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante**, die dimensionslos ist und etwa den Wert $\frac{1}{137}$ hat.

Die Korrektur ist also desto größer, je kleiner n und l sind: Für kleine n ist das Elektron näher am Kern, die Geschwindigkeit nimmt zu, und für kleine l ist die Bahn elliptischer und damit auch näher am Kern. Für $l = n - 1$ ist die Bahn kugelsymmetrisch.

Die Größenordnung, in der die Korrektur ist, steht etwa im Verhältnis 10^{-4} bzw. α^2 zu der klassischen Energie.

Eine andere Korrektur ähnlicher Größenordnung, allerdings nicht für die kinetische, sondern für die potentielle Energie, ist der **Darwin-Term**. Er ist notwendig, weil die Ladung des Elektrons im Coulomb-Potential keinen exakten Ort besitzt.

6.7 Elektronenspin

Beim **Stern-Gerlach-Experiment** werden Silberatome als Strahl durch ein inhomogenes Magnetfeld (stärker in $+z$, schwächer in $-z$) geschossen. Dabei teilte sich die Verteilung auf einem Schirm, auf den der Strahl auftritt, in zwei Maxima auf.

Das magnetische Moment, das eine Bewegung in z -Richtung im Magnetfeld verursacht hat, kann jedoch nicht durch den Zeeman-Effekt erklärt werden, denn Silber hat im Grundzustand den Bahndrehimpuls $l = 0$. Also mussten Elektronen noch einen **Eigendrehimpuls** haben, den **Spin** \vec{s} , der ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_s$ induziert.

Der Elektronenspin \vec{s} ist in seiner Länge analog über $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$ quantisiert und in seiner Richtung über $s_z = m_s$.

Weil $\Delta m_s = 1$ und $-s \leq m_s \leq s$ gilt, muss auch $s = \pm \frac{1}{2}$ sein.

Der Spinvektor hat also immer die *Länge* $\sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$, die *Richtung* m_s kann aber die Werte $\pm \frac{1}{2}$ annehmen. Damit ist m_s , (die Spineinstellung des Elektrons, „up“ oder „down“) die vierte Quantenzahl neben Hauptquantenzahl n , Nebenquantenzahl (Drehimpulsquantenzahl) l und magnetischer Quantenzahl m_l .

6.7.1 Einstein-de Haas-Effekt

Für das magnetische Spinmoment des Elektrons gilt

$$\vec{\mu}_s = \gamma_s \vec{s}.$$

Während für das Bahnmagnetmoment das gyromagnetische Verhältnis $\gamma_l = \frac{-e}{2m_e}$ ist, hat γ_s einen anderen Wert.

Dieser wurde in einem Experiment bestimmt, der von Einstein vorgeschlagen und von **Johannes de Haas** 1915 durchgeführt wurde.

Hierbei hängt ein ferromagnetischer Eisenzylinder an einem Faden und ist von einer Spule umgeben. Durch die Spule sei ein Magnetfeld aufgebaut, das so stark ist, dass der Eisenkern magnetisch gesättigt ist. Dessen Magnetisierung, die nur durch die Spinausrichtung der freien Elektronen im Metall erfolgt, ist dann:

$$M = N \cdot \mu_s$$

Bei einer Umpolung des Magnetfeldes ändert sich die Magnetisierung um

$$\Delta M = 2M = 2 \cdot N \cdot \mu_s.$$

Das heißt, dass aber auch alle Elektronenspins „umklappen“ müssen, der Gesamtspin ändert sich also um:

$$\Delta S = 2 \cdot N \cdot s_z = 2 \cdot N \cdot \hbar$$

Diese Änderung des Spins passiert gleichzeitig mit einer makroskopischen Änderung des Drehimpulses des Zylinders, da Drehimpuls und Eigendrehimpuls gemeinsam einem Erhaltungsgesetz unterliegen.

$$\Delta S + L = 0$$

$$\Delta S = -L = -\omega \cdot I$$

Messung des äußeren Drehimpulses ergibt

$$\frac{\Delta M}{\Delta S} = \frac{N \cdot \mu_{sz}}{N \cdot s_z} = \frac{\mu_{sz}}{s_z} = \gamma_s \simeq \frac{e}{m_e} = 2 \cdot \gamma_l$$

6.8 Drehimpulse im Atom

Im Gegensatz zum klassischen Drehimpuls ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$) sind bei quantenmechanischen Drehimpulsen immer nur die Länge und eine Komponente gleichzeitig messbar.

Bahndrehimpuls l : Nebenquantenzahl, Drehimpuls des Elektrons um den Kern.

$$\begin{aligned} |\vec{l}| &= \sqrt{l(l+1)}\hbar \\ l &\leq n-1 \\ l_z &= m_l \hbar \\ -l &\leq m_l \leq l. \end{aligned}$$

Spin s : Eigendrehimpuls des Elektrons, (Up-Spin/Down-Spin).

$$\begin{aligned} |\vec{s}| &= \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar \\ s &= \frac{1}{2} \\ s_z &= m_s \hbar \\ -s &\leq m_s \leq s \\ m_s &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Gesamtdrehimpuls Elektron j : Summe von Spin und Bahndrehimpuls.

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{s} + \vec{l} \\ |\vec{j}| &= \sqrt{j(j+1)}\hbar \\ j &\text{ ist halbzahlige Quantenzahl: } j = l \pm s = l \pm \frac{1}{2} \\ \text{Aber stets: } |l-s| &\leq j \leq l+s. \\ j_z &= m_j \hbar \\ -j &\leq m_j \leq j, m_j \text{ ist auch halbzahlig mit } \Delta m_j = 1. \end{aligned}$$

Kernspin I : Eigendrehimpuls des Atomkerns.

$$\begin{aligned} |\vec{I}| &= \sqrt{I(I+1)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar \\ I &= \frac{1}{2} \text{ pro Proton oder Neutron,} \\ I_z &= m_I \hbar \\ -I &\leq m_I \leq I \\ m_I &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Gesamtdrehimpuls F : Summe aller Drehimpulse im Atom.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{j} + \vec{I} \\ |\vec{F}| &= \sqrt{F(F+1)}\hbar \\ F &\text{ ist ganzzahlige Quantenzahl: } F = j \pm I = j \pm \frac{1}{2} \\ F_z &= m_F \hbar \\ -F &\leq m_F \leq F, m_F \text{ ist ganzzahlig.} \end{aligned}$$

6.9 Feinstruktur und Spin-Bahn-Kopplung

Ladung, die um einen Punkt im Raum kreist, erzeugt in diesem Punkt ein Magnetfeld.

Dessen Stärke lässt sich berechnen durch das **Biot-Savart-Gesetz**:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Und über die Kreisbahn integriert:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{2\pi r}{r^2}$$

Dies gilt auch für das Elektron, das an der Position des Protons (die fast gleich dem Schwerpunkt des Zweikörpersystems ist) ein Magnetfeld erzeugt.

Auf einer Kreisbahn des Elektrons mit Frequenz ν fließt der Strom $-e \cdot \nu$.

Das resultierende Magnetfeld, das dadurch auf den Kern wirkt, ist

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-e \cdot \nu \cdot 2\pi r}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-e \cdot v \cdot 2\pi r}{2\pi r \cdot r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-e \cdot v}{r^2} \end{aligned}$$

Betrachtet man das Ruhesystem des Elektrons, so wird es in dessen Sicht vom Kern umkreist. Setzt man für den Kreisstrom statt $-e$ nun Ze ein, verhält sich die Herleitung fast genauso:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze \cdot v}{r^2}$$

Statt über die Bahngeschwindigkeit muss die Bewegung des Elektrons korrekter über seinen quantenmechanischen Bahndrehimpuls ausgedrückt werden. Außerdem muss für relativistische Korrektheit der so genannte *Thomas-Faktor* von $\frac{1}{2}$ berücksichtigt werden, da das Ruhesystem des Elektrons ein beschleunigtes System ist.

Wegen $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ergibt sich:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{Ze}{m_e \cdot r^3} \cdot \vec{l}$$

Das Magnetfeld zeigt also in dieselbe Richtung wie der Bahndrehimpulsvektor des Elektrons.

Da der Spin \vec{s} des Elektrons das magnetische Moment $\vec{\mu}_s = \gamma_s \vec{s}$ besitzt und entlang der Achse des Magnetfeldes nur die Werte $s_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$ annehmen kann, gibt es eine Aufspaltung in zwei verschiedene Energieniveaus, vergleichbar mit dem Zeeman-Effekt mit seinen $(2l + 1)$ äquidistanten Aufspaltungen. Beim normalen Zeeman-Effekt gibt es jedoch wegen des erlaubten Bahndrehimpulses von 0 stets eine ungerade Anzahl von Aufspaltungen.

Die Energiedifferenz ist

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} \\ &= -\gamma_s \vec{s} \cdot \vec{B} \\ &= -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

und wegen $g_s \mu_B \simeq 2\mu_B = -\frac{e}{m_e}$:

$$\Delta E \simeq \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m_e^2 r^3} \cdot \vec{s} \cdot \vec{l}$$

Die Energie $E_{n,l,s}$ ist also nicht mehr entartet, sondern

$$\begin{aligned} E_{n,l,s} &= E_n - \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l \\ &= E_n + \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m_e^2 r^3} \cdot \vec{s} \cdot \vec{l}. \end{aligned}$$

Die Aufspaltung hängt also vom Skalarprodukt von \vec{s} und \vec{l} ab, d.h. auch von deren Orientierung im Raum zueinander. Welche möglichen Skalarprodukte können sich hier ergeben?

Da gilt

$$\begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{l} &= \frac{1}{2} [\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2] \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)], \end{aligned}$$

gibt es nur die Energien

$$E_{n,l,s} = E_n + \frac{a}{2} \cdot [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)],$$

wobei a die **Spin-Bahn-Kopplungskonstante** ist:

$$a = \frac{\mu_0 Z e^2 \hbar^2}{8\pi m_e^2 r^3}$$

Da $s = \pm \frac{1}{2}$, kann j die Werte $l + \frac{1}{2}$ und $l - \frac{1}{2}$ annehmen. Für ein n und ein l spaltet sich die Energie $E_{n,l}$ also in 2 Komponenten für verschiedene j auf. Für $l = 0$ ist $j = s = \frac{1}{2}$ und die Abweichung von E_n ist 0. Es erfolgt erwartungsgemäß also keine Aufspaltung in s-Zuständen.

Für $l = 1$ sind die Werte $j = \frac{1}{2}$ und $j = \frac{3}{2}$ möglich. Die Abweichung ist dann entweder

$$\frac{a}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) - 1(2) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \right] = \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} - \frac{8}{4} - \frac{3}{4} \right] = \frac{a}{2} \cdot (-2) = -a$$

oder

$$\frac{a}{2} \cdot \left[\frac{3}{2} \left(\frac{5}{2} \right) - 1(2) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \right] = \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{15}{4} - \frac{8}{4} - \frac{3}{4} \right] = \frac{a}{2} \cdot 1 = \frac{a}{2}$$

Die Energie kann also abgesenkt werden (Spinmoment ist zum Magnetfeld ausgerichtet) oder erhöht werden (Spinmoment ist entgegen dem Magnetfeld ausgerichtet und kann noch umklappen).

Zusammen mit der relativistischen Korrektur ergibt sich aber eine Gesamtenergie

$$E_{n,j} = E_n \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

Solange nur ein Elektron vorhanden ist, das Atom also ein Coulomb-Potential bildet, hängt die Energie demnach nur von n und j ab, jedoch nicht direkt von l .

Beispiel für das H-Atom: Es sei $Z = 1, n = 1, j = s = \frac{1}{2}$. Die Abweichung ist dann

$$\Delta E_{FS} = E_n \alpha^2 \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right)$$

und damit für $j = \frac{1}{2}$ um $E_n \alpha^2 \frac{1}{4}$ nach unten. Für $n = 2$ ergibt sich $E_n \frac{\alpha^2}{2} \frac{5}{8}$ für $j = \frac{1}{2}$ und $E_n \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{8}$ für $j = \frac{3}{2}$.

Je höher die Quantenzahlen n und j sind, desto schwächer ist also die Feinstrukturaufspaltung, die Energie wird jedoch für alle Feinstrukturlinien betragsmäßig immer größer, die potentielle Energie damit kleiner. Für größere E_n und Z wird die Aufspaltung dagegen breiter.

Sie liegt im Bereich $10^{-5} \cdot Z^2 \cdot E_n$.

Die Spin-Bahn-Kopplung verändert die Energie für s-Zustände ($l = 0$) *nicht*, da hier kein Magnetfeld erzeugt wird. Die relativistische Korrektur ist hier jedoch am höchsten und die Energien von $l = 0, s = \frac{1}{2} \uparrow$ und $l = 0, s = \frac{1}{2} \downarrow$ und $l = 1, s = \frac{1}{2} \downarrow, j = \frac{1}{2}$ sind allesamt identisch.

6.10 Hyperfeinstruktur

Bei sehr genauer (dopplerfreier) Spektroskopie findet man für Niveaus mit $\vec{J} \neq 0$ eine weitere, winzige Aufspaltung von jeder der Feinstrukturlinien in zwei weitere Linien, die **Hyperfeinstruktur**.

Diese rühren daher, dass neben dem Elektron auch der Kern des Atom einen Spin besitzt, den **Kernspin** \vec{I} . Dieser kann ganzzahlig oder halbzahlig sein, im Atomkern mit einer ungeraden Anzahl von Nukleonen ist er stets halbzahlig, ist die Anzahl gerade, so ist er ganzzahlig.

Wie auch der Elektronenspin erzeugt der Kernspin ein magnetisches Moment:

$$\vec{\mu}_I = \gamma_I \cdot \vec{I}$$

Das gyromagnetische Verhältnis ist analog zum Elektron:

$$\gamma_I = \frac{e}{2m_p} = \frac{1}{1836} \gamma_e.$$

Wegen der viel höheren Masse definiert man ein *Kernmagneton*, das um den entsprechenden Faktor kleiner ist als das Bohr'sche Elektronenmagneton:

$$\mu_K = \frac{e}{2m_p} \hbar = \frac{\mu_B}{1836} = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{J}{T}$$

Trotz des Kernmagnetons wird noch ein korrigierender *Landé-Faktor* von $g_I = 5,58$ (beim Neutron $g_I = -3,7$) benötigt, da das Spinnmoment des Protons ebenfalls anomal gegenüber dem klassischen Drehimpuls ist.

$$\vec{\mu}_I = g_I \frac{e}{2m_p} \vec{I} = g_I \frac{\mu_K}{\hbar} \vec{I}$$

Die Hyperfeinstruktur resultiert nun ähnlich wie die Feinstruktur aus einer Kopplung von Bahn und Spin: Hier wechselwirken jedoch Gesamtdrehimpuls \vec{j} des Elektrons mit dem magnetischen Kernmoment $\vec{\mu}_I$ und andersherum das vom Kernspin \vec{I} erzeugte Magnetfeld mit dem elektronischen Magnetmoment $\vec{\mu}_j$.

Betrachte hier nur die Energie, die von der Ausrichtung des Kernmoments im elektronischen Magnetfeld abhängt:

$$\begin{aligned} E &= -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_j \\ &= -\mu_I \cdot B_j \cdot \cos(\angle(\vec{j}, \vec{I})) \\ &= -\mu_I \cdot B_j \cdot \frac{\vec{j} \cdot \vec{I}}{|\vec{j}| \cdot |\vec{I}|} \\ &= -\mu_I \cdot B_j \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)}{\sqrt{j(j+1)} \cdot I(I+1)} \\ &= \frac{A_j}{2} \cdot [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)] \end{aligned}$$

Hier ist A_j die **Hyperfeinkonstante** für Elektronendrehimpuls j . Ihr Wert ist

$$A_j = \frac{g_I \mu_K B_j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

Sollte $I = 0$ oder $j = 0$ gelten, so gibt es keine Aufspaltung in die Hyperfeinstruktur.

Beispiel für die HFS im Grundzustand des Wasserstoffs: Hier ist $n = 1$ und $l = 0$, $s = \frac{1}{2}$, $j = \frac{1}{2}$. Da $I = \pm \frac{1}{2}$, kann der Gesamtdrehimpuls des Atoms nur $F = 0$ oder $F = 1$ sein, je nach relativer Spinstellung des Protons zum Elektronengesamtdrehimpuls.

Die beiden Energien der Hyperfeinstruktur sind also

$$\begin{aligned} E_{HFS} &= E_{1,0,\frac{1}{2}} + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left[0(1) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \right] \\ &= E_{1,0,\frac{1}{2}} + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left[-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] \\ &= E_{1,0,\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} A_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E_{HFS} &= E_{1,0,\frac{1}{2}} + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left[1(2) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \right] \\ &= E_{1,0,\frac{1}{2}} + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left[2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] \\ &= E_{1,0,\frac{1}{2}} + \frac{A_{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left[\frac{2}{4} \right] \\ &= E_{1,0,\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} A_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Diese Aufspaltung ist noch viel kleiner als die Feinstrukturaufspaltung und liegt beim Wasserstoff im Bereich von $5,7 \cdot 10^{-6}$ eV. Die beim Übergang zwischen den beiden Energien ausgesandte Linie hat eine Wellenlänge von 21 cm im Mikrowellenbereich, mit ihr wird die Verteilung des Wasserstoffs im Universum gemessen.

Der zweite Beitrag zur Hyperfeinstruktur, die Wechselwirkung mit dem vom Kernmoment erzeugten Magnetfeld, spielt für kugelsymmetrische Elektronenverteilungen keine Rolle, also nur für Zustände mit $l \geq 1$.

6.11 Anomaler Zeeman-Effekt und Paschen-Back-Effekt

Der normale Zeeman-Effekt tritt nur auf, wenn das Atom einen elektronischen Gesamtspin von $\vec{S} = 0$ hat (nur für Atome mit gerader Elektronenzahl möglich). Beim normalen Zeeman-Effekt präzedieren die Bahndrehimpulsvektoren jeweils um die Magnetfeldrichtung. Gibt es jedoch einen nicht-verschwindenden Spin \vec{s} , so muss der Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ betrachtet werden. Dessen magnetisches Moment ist

$$\mu_j = \mu_l + \mu_s = -\frac{e}{2m_e} (\vec{l} + g_s \vec{s}).$$

Aufgrund des anomalen Spinmoments ist $\vec{\mu}_j$ jedoch nicht mehr antiparallel zu \vec{j} , sondern zeigt leicht in Richtung von $\vec{\mu}_s$. Da \vec{s} um \vec{j} präzediert, tut dies damit auch $\vec{\mu}_j$. Der zeitliche Mittelwert von $\vec{\mu}_j$ entspricht damit aber seiner Projektion auf die \vec{j} -Achse. Sie ist

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{\vec{\mu}_j \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} \\ &= -\frac{e}{2m_e} \left(\frac{\vec{l} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} + g_s \frac{\vec{s} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} \right) \end{aligned}$$

Auflösen der Skalarprodukte durch Quantenzahlen liefert

$$\langle \mu_j \rangle = g_j \frac{\mu_B}{\hbar} |\vec{j}|$$

Der Landé-Faktor g_j für den Gesamtdrehimpuls liegt dabei irgendwo zwischen $g_l = 1$ und $g_s = 2$, die die Spezialfälle für $s = 0$ und $l = 0$ darstellen.

Genauer: $g_j = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}$.

Wird nun ein Magnetfeld angelegt, so wird die potentielle Energie um

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\langle \vec{\mu}_j \rangle \cdot \vec{B} \\ &= -g_j \mu_B \cdot m_j \end{aligned}$$

erhöht.

Die Energie eines j spaltet sich also in $2j+1$ Zeeman-Komponenten auf, die äquidistant um die Energie $g_j \cdot \mu_B$ versetzt sind. Hier gibt es dadurch aber mehr als drei mögliche Übergangsenergien zwischen Schalen und Unterschalen, da die Abstände für verschiedene j verschieden sind.

6.11.1 Paschen-Back-Effekt

Die HFS-Komponenten unterscheiden sich durch verschiedene Atomdrehimpulse \vec{F} voneinander, \vec{F} bildet durch Kopplung der einzelnen Drehimpulse von Kern und Elektronen dabei einen scharf messbaren Gesamtdrehimpuls mit Quantenzahl F .

In sehr schwachen Magnetfeldern erfolgt eine Zeeman-Aufspaltung durch das magnetische Moment $\vec{\mu}_F$ in $2F + 1$ Komponenten jeder Hyperfeinstrukturenergie. Sobald jedoch die Zeeman-Energieaufspaltung $\Delta E = \vec{\mu}_F \cdot \vec{B}$ in die Größenordnung von ΔE_{HFS} kommt, bricht das Magnetfeld die Kopplung von \vec{J} und \vec{I} zu \vec{F} auf. \vec{J} und \vec{I} präzedieren dann getrennt um die Magnetfeldachse und nicht mehr um \vec{F} , der Drehimpuls \vec{F} lässt sich nicht mehr scharf messen (F ist keine „gute“ Quantenzahl mehr).

Die Energien spalten sich dabei in $2J + 1$ Komponenten auf, jede einzeln davon wieder in $2I + 1$ Komponenten.

Ist die Zeeman-Aufspaltung in der Größenordnung der Feinstrukturaufspaltung, so entkoppelt \vec{j} ebenfalls zu einzelnen Drehimpulsen \vec{s} und \vec{l} , die getrennt um die Magnetfeldachse präzedieren.

Die Zeeman-Aufspaltung wird dann

$$\Delta E = \mu_B \cdot B \cdot (g_l m_l + g_s m_s)$$

und ist für $\vec{S} = 0$ identisch zum normalen Zeeman-Effekt, bildet in allen Fällen aber eine ähnliche Energieaufspaltung wie der normale Zeeman-Effekt: Die „Steigung“ der Energieniveaus mit zunehmenden Magnetfeld ist hier etwa $m_l + 2m_s$, und es gibt $2(2l+1)$ Komponenten, wobei die Komponenten mit gleichem $m_l + 2m_s$ wegen $g_s \simeq 2$ „fast“ zusammenfallen, etwa bei $m_l = 1, m_s = -\frac{1}{2}$ oder $m_l = -1, m_s = \frac{1}{2}$.

6.12 Übergangswahrscheinlichkeiten und Auswahlregeln

6.13 Lamb-Verschiebung

- Nicht durch Dirac-Theorie beschrieben
- Erst durch QED beschrieben
- Energiedifferenz von 1GHz beim Wasserstoff zwischen $2S_{\frac{1}{2}}$ und $2P_{\frac{1}{2}}$, obwohl für gleiches j Zustände bei Dirac entartet. Metastabiler Zustand $2S_{\frac{1}{2}}$ konnte nach 1GHz-Anregung auf $2P_{\frac{1}{2}}$ zu $1S_{\frac{1}{2}}$ zerfallen.
- Höhere Energie durch „Wegdrücken“ des Elektrons vom Kern wegen virtueller Photonen durch Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron, nur bei S vorhanden, da dort Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern > 0 .

7 Atome mit mehreren Elektronen

7.1 Das Helium-Atom

- Schrödingergleichung nicht in Radial- und Winkelanteil separierbar

- Nur analytisch lösbar
- Näherungsweise zurückführbar auf System mit einem Elektron, indem zweites Elektron im Raum „verschmiert“ wird und den Kern abschirmt
- Grundzustand: $-78,9 \text{ eV}$

7.2 Symmetrie der Wellenfunktionen

Beim Vertauschen zweier Elektronen ändert sich die Wahrscheinlichkeit (Quadrat der Welle) nicht und damit höchstens das Vorzeichen der Welle. Bei zweimaligem Vertauschen ändert sich die Welle gar nicht.

- Singulett-Zustand (Parahelium): Spins stehen antiparallel, $S = 0$, Spinfunktionen sind antisymmetrisch.
- Triplett-Zustand (Orthohelium): Spins stehen parallel, $S = 1$, $M_S = 0, \pm 1$, Spinfunktionen sind symmetrisch.
- Bei Triplett-Zuständen sind die Energien noch weiter abgesenkt: Durch die parallelen Spins ist die Ortsfunktion antisymmetrisch, die Elektronen sind weiter voneinander entfernt und haben weniger Energie im Coulomb-Potential.
- Übergänge ins Singulett-System erfordern Umklappen des Spins. Bei leichten Elementen kann dies nicht durch einen Dipolübergang erfolgen.

7.3 Aufbau der Elektronenhülle größerer Atome

- Elektronenschalen
- Hundsche Regel des maximalen Spins
- JJ-Kopplung statt LS-Kopplung bei schweren Atomen

8 Verschiedenes

8.1 Verständnisfragen der Übung

Warum vertauscht ein Spiegel links und rechts, aber nicht oben und unten ?

Er vertauscht nicht links und rechts. Wir sind nur gewohnt, andere Menschen spiegelverkehrt zu sehen.

Wieso sieht man 2 Regenbögen mit invertierten Farben?

Zweifachreflexion und Dreifachreflexion mit verschiedenen Austrittswinkeln

Die Dichte der Atmosphäre wird mit zunehmender Höhe geringer. Erklären Sie, warum man die Sonne unmittelbar nach Untergang noch sehen kann und warum sie kurz vorher flach erscheint.

Der Brechungsindex ist mit zunehmender Höhe auch geringer. Die Lichtstrahlen gehen den optisch kürzesten Weg und verlaufen deshalb in einer Kurve.

Was versteht man unter kohärenten Wellen? Wodurch unterscheidet sich kohärentes Licht von „normalem“ Tageslicht, wie es von der Sonne kommt?

Kohärentes Licht sind phasenstarr gekoppelte Photonen. Phasenbeziehungen in normalem Licht sind zeitlich veränderlich und statistisch verteilt.

Was ist die Kohärenzlänge und welche Bedeutung hat sie im Zusammenhang mit Interferenzexperimenten von Licht?

Licht, das diesen Weg durchläuft, weist noch messbare Interferenzeigenschaften auf, danach nicht mehr. Laser haben hohe Kohärenzlänge.

Bei genauer Betrachtung erkennt man, dass beschichtete Brillengläser manchmal farbig schillern. Warum ist das so?

Sie absorbieren bestimmte Wellenlängen (Anti-Reflex) und reflektieren andere.

Warum kann man Leute hinter einer Litfaßsäule hören, aber nicht sehen?

Die Säule ist nur für Wellen eine beugende Struktur, die eine Wellenlänge ähnlich ihrer Größe hat: Schall, nicht Licht.

Wo bleibt eigentlich die Energie, wenn sich 2 Wellen destruktiv überlagern?

In der konstruktiven Überlagerung. Z.B. wird beim Michelson-Interferometer Licht in die Quelle zurückgespiegelt.

Was ist ein „Geblaztes Gitter“ und welche Vorteile bietet es?

Ein Blazegitter hat sein Intensitätsmaximum im Interferenzmuster nicht in der nullten Ordnung, sondern in einer anderen (z.B. der ersten), so dass leichter Spektroskopie betrieben werden kann. Dies geschieht, weil die natürliche Reflexionsrichtung und Richtung des Interferenzmaximums zusammenfallen.

Welcher physikalische Grund setzt der Verkleinerung der Blendenöffnung im Fotoapparat eine natürliche Grenze? Was würde passieren, wenn man diesen Grund ignoriert und den Durchmesser im Mikrometerbereich einstellen würde?

Die Beugungseffekte würden stark zunehmen, da der Durchmesser in der Größenordnung der Wellenlänge wäre.

Warum wird in Spektrometern das optische Gitter gegenüber dem Einfachspalt bevorzugt, obwohl der Einfachspalt auch eine Bestimmung der Wellenlänge erlauben würde?

Das Gitter hat viele Nebenmaxima zwischen den Hauptmaxima, dadurch wird mehr Intensität auf die Hauptmaxima konzentriert.

Was unterscheidet Fresnel- und Fraunhofer-Beugung?

Nahfeldbeugung und Fernfeldbeugung. Die Fernfeldbeugung hat winkelunabhängige Maxima. Bei der Fernfeldbeugung spielt nur die erste, innerste Fresnel-Zone eine Rolle.

Für Röntgenstrahlung ist bei fast allen Materialien der Brechungsindex nahe 1. Wie kann man trotzdem Linsen und Spiegel konstruieren?

Fresnellinsen und sehr glatte Spiegel.

Wie kann man aus linear polarisiertem Licht zirkulares Licht machen und umgekehrt?

Ein $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen ist ein anisotropes Material mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten für Licht für verschiedene Polarisationsrichtungen. Licht kann immer in zwei senkrecht zueinanderstehende Polarisationsrichtungen zerlegt werden (die eine Phasendifferenz haben können).

Welche Annahmen führen in der Planck'schen und in der Einstein'schen Herleitung zum Planck'schen Strahlungsgesetz?

Planck: Energie ist gequantelt in Photonen.

Was sind Energiedichte, Bestrahlungstärke und Strahlungsmenge?

Wie sind Thermoskannen („Dewar-Gefäße“) aufgebaut?

Vakuum, um Wärmeleitung zu verhindern. Verspiegelte Oberflächen ($\varepsilon \rightarrow 0$), um Wärmestrahlung zu verhindern.

Was bedeutet die Abkürzung „LASER“?

Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Was versteht man unter der Besetzungsinversion der Energiezustände?

Die Besetzungsverhältnisse sind zugunsten eines höherenergetischen Zustands, was den üblichen thermischen Besetzungsverhältnissen widerspricht.

Was muss man tun, um die Besetzungsinversion der Zustände zu erreichen?

Energie pumpen und stetig Elektronen anregen.

Welchen Vorteil hat ein Vier- gegenüber einem Drei-Niveau-Laser?

Drei Niveaus: Optisches Pumpen von E_1 nach E_3 möglich, da E_3 leer. Bei zwei Niveaus nicht möglich. Besetzungsinversion dann zwischen E_2 und E_1 . Vier Niveaus: Pumpen nach E_3 , Lasing von E_2 nach E_1 , E_3 und E_1 sind immer leer, Grundzustand ist E_0 , ideale Besetzungsinversion.

Wie pumpt man einen Rubin-, einen He-Ne- und einen Halbleiterlaser?

Blitzlicht, Gasentladung, elektrische Spannung.

Wie funktioniert und was zeigt der Franck-Hertz Versuch?

Im Franck-Hertz-Versuch stoßen beschleunigte Elektronen an Quecksilber-Gasatome und geben dabei ihre Energie ab. Die durch elastische Stöße abgegebene Energie ist jedoch vernachlässigbar klein, hauptsächlich wird ab einer bestimmten Energieschwelle das Quecksilber angeregt. Die dafür notwendigen Energien sind diskret, es gibt eine Energieschwelle für die Anregung.

Benennen Sie die beiden Forderungen zu Kräften und Drehimpuls, aus denen das Bohrsche Modell stabile Elektronenbahnen bestimmt.

Coulomb-Kraft ist gleich der Zentripetalkraft auf der Kreisbahn des Elektrons, der Drehimpuls ist ein Vielfaches von \hbar .

Können Sie die Bohrsche Bahnquantisierungsbedingung auch aus konstruktiver Interferenz von de-Broglie-Wellen herleiten?

Wird das Elektron als Materiewelle betrachtet, so ist es nur stabil, wenn auf der Kreisbahn keine destruktive Interferenz stattfindet, sondern konstruktive, sich also eine stehende Welle bildet. Die Länge der Kreisbahn muss dafür ein Vielfaches der Wellenlänge des Elektrons sein. Dies ist genau dann erfüllt, wenn der Drehimpuls Vielfaches von \hbar ist. Die Vorstellung des Elektrons als stehende Welle erklärt auch das Fehlen von Energieabstrahlung.

Kann man auch nur mit der Unschärferelation die Stabilität des Grundzustandes von Wasserstoff erklären?

Beim Abstand a_0 (Bohr'scher Radius) hat das Elektron minimale Energie, da es bei noch geringerem Abstand durch die Orts-Impuls-Unschärfe wieder mehr kinetische Energie haben muss.

Ohne Taschenrechner: Wie viel Energie wird frei, wenn ein Elektron von der Bahn $n=3$ auf die Bahn $n=2$ „herunterfällt“? Welche Wellenlänge hat das dabei emittierte Photon etwa?

$$R_y^* \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{6} \simeq 2,2 \text{ eV}$$

Wo findet man in der Schrödingergleichung den Elektronenspin?

Wird in der Schrödingergleichung nicht berücksichtigt, erst in der Dirac-Gleichung.

Was ist der Einstein-de Haas Effekt?

Ausgerichtete Spins ($\hat{=}$ „Magnetisierung“) werden umgeklappt. Erhaltung des Drehimpulses von $N \cdot \hbar$ als mechanischen Drehimpuls.

Was unterscheidet normalen und anomalen Zeeman-Effekt?

Der normale Effekt tritt nur mit Gesamtspin 0 auf, die Abweichungen der Energien sind proportional zu B und äquidistant: Es gibt nur drei optische Linien.

Der anomale Effekt tritt bei Gesamtspin $\neq 0$ auf, die Abweichungen sind pro j -Niveau proportional zu B und g_j und äquidistant für jedes j -Niveau, insgesamt aber nicht äquidistant: Es gibt viele optische Linien.

Wann tritt der Paschen-Back-Effekt auf?

Bei starken Magnetfeldern ist die Zeeman-Aufspaltung der Niveaus stärker als die Aufspaltung durch LS-Kopplung. Dann entkoppeln L und S und es gibt Zeeman-Aufspaltungen für m_l und m_s gleichzeitig.

Was bedeutet der Term $3^2P_{\frac{1}{2}}$?

$n = 3, S = \frac{1}{2}, 2S + 1 = 2, L = 1, J = \frac{1}{2}$. Hauptquantenzahl ist 3, der Gesamtspin ist $\frac{1}{2}$ und steht dem Bahndrehimpuls L entgegen, Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle J ist also $\frac{1}{2}$.

Was beschreibt die Wellenfunktion ψ und wie berechnet man sie?

Die Funktion ψ beschreibt die „Wahrscheinlichkeitsamplitude“ für den Aufenthalt eines Teilchens. Durch Quadrieren und Normieren erhält man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit.

Die Wellenfunktion ψ ist stets eine Lösung der Schrödingergleichung.

Was wissen Sie über die Wellenfunktionen des H-Atoms?

Die Lösungen für die Schrödingergleichung des H-Atoms sind im Gegensatz zu allen anderen Atomen analytisch berechenbar. Sie sind in Radialfunktion und Kugelflächenfunktionen zerlegbar. Die Radialfunktion hängt nur von n und l ab, die Kugelflächenfunktionen nur von l und m .

Was sind Zeemaneffekt, Feinstruktur und Hyperfeinstruktur?

Zeeman: Aufhebung der m_j -Entartung im Magnetfeld.

Feinstruktur: Relativistische Korrektur + Aufspaltung durch LS-Kopplung

Hyperfeinstruktur: Aufspaltung durch IJ-Kopplung.

Was ist das Korrespondenzprinzip und was sind Rydbergatome?

Rydbergatome: Atome mit einem Elektron.

Korrespondenzprinzip: Quantenmechanisches Verhalten geht für große Energien in klassische Physik über, bzw. falsche Theorien beschreiben immer bestimmte Randbereiche.

Was ändert sich vom Übergang von H auf ein Atom mit vielen Elektronen?

Durch zusätzliche Coulomb-Abstoßung entsteht ein Dreikörperproblem, das nicht mehr analytisch lösbar ist. Annäherung ist z.B. beim Helium durch die Abschirmungskonstante S möglich.

Was sind Pauliprinzip und Hundsche Regel?

Pauli-Prinzip: Fermionen haben immer eine antisymmetrische Wellenfunktion.

Hund'sche Regel: Der Gesamtspin S nimmt innerhalb einer Unterschale immer den maximalen Wert an. Dies sorgt für minimale Energie, da bei symmetrischen Spinfunktionen die Ortsfunktion der Elektronen antisymmetrisch sein kann. Damit sind die Elektronen aber statistisch gesehen weiter voneinander entfernt und besitzen weniger Energie im Coulomb-Potential.

Erklären Sie den Aufbau des Periodensystems.

Innerhalb einer Spalte (Gruppe) haben Atome gleich viele Elektronen in der äußersten Schale. Innerhalb einer Zeile (Periode) wird stets die gleiche maximale Hauptquantenzahl besetzt.

Wie lauten die Quantenzahlen L, S und J für Edelgasatome?

Edelgas besteht aus Atomen, für die alle Schalen abgeschlossen sind. Es gilt also $L = S = J = 0$.

Was ist ein Dipolübergang und wie sehen die Auswahlregeln dazu aus?

Betrachtung des Atoms als elektrischer Dipol und Emission oder Absorption eines Photons. $\Delta l = 1, \Delta m = 0, \pm 1, \Delta s = 0$ (für wasserstoffähnliche Atome).

Was ist die natürliche Linienbreite und was kann man daraus ablesen?

Spektrallinien bestimmter Übergänge fester Energien sind keine unendlich feinen Linien, obwohl die Energien der einzelnen Niveaus fest sind. Dies liegt daran, dass die Energie der Elektronen für gewisse Zeit Δt um $\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}$ abweichen darf (Zeit-Energie-Unschärfe).

Daneben gibt es noch die Dopplerbreite (andere Energien wegen kinetischer Energie der Atome) und die Stoßverbreiterung (Wechselwirkung zwischen Atomen).

Was sind die Einstein'schen Koeffizienten und wie arbeitet ein Laser?

Die Koeffizienten beschreiben die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang. (Einheit: Wahrscheinlichkeit pro Sekunde und pro Elektron).

Ein Laser erzeugt Photonenlawinen durch induzierte Emission in einer Besetzungsinversion, dabei wird diese Inversion durch eine Energiepumpe und einen Resonator aufrechterhalten.

8.2 Relevante Versuche

Pohl: Pohlscher Interferenzversuch

Young: Interferenz am Doppelspalt mit Weißlicht

Thermosäule: Bestimmung der spektralen Strahlungsdichte

Millikan: Ladung des Elektrons und Quantisierung der Ladung bestimmt

Compton: Streuung von Photonen, Photonenimpuls

Hallwachs, Einstein (Photoeffekt): Herauslösung von Elektronen durch UV→Metall, Austrittsarbeit → Photonen als Teilchen, Energiequantelung durch Photonen

Streuversuch, Rutherford: Aufbau des Atoms, kleiner Kern, große Hülle

Rot-Blau-Verschiebung: Photonen ein Potential hinaufklettern zu lassen verschiebt sie ins Rote, sie in ein Potential hineinfallen zu lassen, verschiebt sie ins Blaue

Thomson: Bestimmung von $\frac{e}{m_e}$, Ablenkung auf Parabel

Lenard-Röhre: Mindestenergie für Ionisation von Gasatomen

Franck-Hertz: Inelastische Stöße → Atome haben diskrete Anregungsniveaus

Zeeman: Nachweis für magnetisches Moment des Elektronenbahndrehimpulses

Stern-Gerlach: Nachweis für Elektronenspin

Einstein-de Haas: Gyromagnetisches Verhältnis des Spin

9 Formeln und Konstanten

9.1 Formeln

Reflexionsgesetz:

$$\alpha = \alpha'$$

Snellius' Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c'_1}{c'_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Sie bilden die Axiome der geometrischen Optik:

1. Lichtstrahlen sind in optisch homogenen Medien Geraden
2. An Grenzflächen gibt es Reflexion und Brechung
3. Strahlenbündel beeinflussen sich nicht gegenseitig, Intensitäten werden addiert

1 und 2 folgen aus dem Fermatschen Prinzip: Licht geht minimale Wege von A nach B.

Paraxialer Brennpunkt für sphärischer Hohlspiegel:

$$f = \frac{R}{2}$$

Brenngleichung für Parabolspiegel:

$$y^2 = 4fx$$

Paraxialer Brennpunkt für gekrümmte Fläche:

$$f = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} R = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

Für Luft ($n_1 = 1$) und Glas ($n_2 = \frac{3}{2}$): $f = 3R$.

Paraxiale Abbildungsgleichung für dünne Linsen in Luft:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

a, b : Gegenstands- und Bildweite gemessen von der Hauptebene.

Dünne Linse: $d \ll f_1, f_2$

Newton'sche Abbildungsgleichung:

$$f^2 = x_a \cdot x_b$$

x_a, x_b : Gegenstands- und Bildweite gemessen vom gegenstandsseitigen und bildseitigen Brennpunkt aus.

Beide Abbildungsgleichungen gelten auch für dicke Linsen (mehrere Hauptebenen).

Linsensysteme:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2}$$

wenn Abstand $D \ll f_1, f_2$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Die Brechkräfte $D^* = \frac{1}{f}$ addieren sich.

Abbildungsmaßstab:

$$M = \frac{B}{A} =$$

Sinus-Reihenentwicklung bei paraxialer Näherung:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + O(\alpha^5)$$

Abbildungen an Linse:

Virtuelles Bild für $a < f$, reelles Bild für $a > f$, verkleinertes Bild für $a > 2f$, sonst vergrößert.

Kepler-Fernrohr: $f_1 \gg f_2$, $M = \frac{f_1}{f_2}$.

Sphärische Abberation wird umgangen (aplanatische Abbildung) bei Einhaltung der Abbe'schen Sinusbedingung (für festgelegte a und b).

Superpositionsprinzip:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m \left(\vec{A}_m(\vec{r}, t) \cdot e^{i\varphi_m} \right)$$

Kohärenzzeit:

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta \nu}$$

$\Delta \nu$ ist die spektrale Breite des Lichts.

Kohärenzlängen:

Weißlicht: 1,5 μm

Spektrallampe: 20 cm

GaAs-Halbleiterlaser: 150 m

HeNe-Laser: 2 km

Interferenzbedingung für Doppelspalt und ausgedehnter Quelle:

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{D}{b}$$

Je größer die Lichtquelle b , desto weiter weg muss der Schirm D sein (Lichtquelle erscheint als Punkt). Je größer die Wellenlänge, desto größer muss der Spalt d sein.

Gangunterschied in planparalleler Glasplatte (Pohlscher Versuch):

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Phasenunterschied in planparalleler Glasplatte:

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta s - \pi_{\text{Sprung am dichten Medium}}$$

Maxima bei

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= m \cdot 2\pi \\ \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda &= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Transmissionsplatte: Analog mit $m\lambda = \dots$

Airy-Formeln für Vielstrahlinterferenz:

$$I_R = I_0 \frac{F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right)}$$

mit

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

und

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Beugung am Spalt:

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2(B)}{B^2}$$

mit $B = \frac{b}{\lambda} \pi \sin \alpha$.

Blende:

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

mit $x = \frac{2R}{\lambda} \pi \sin \alpha$, J_1 Besselfunktion 1. Ordnung.

Rayleigh-Kriterium für kleinsten noch auflösbaren Winkelabstand:

$$\delta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{2R}$$

Beugungsscheibchen-Durchmesser für Linse mit Durchmesser D , Brennweite f :

$$d_{\text{Beug}} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \cdot 2f$$

Interferenz am Gitter:

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 B}{B^2} \cdot \frac{\sin^2 ND}{\sin^2 D}$$

mit $B = \frac{b}{\lambda} \pi \sin \alpha$, $D = \frac{d}{\lambda} \pi \sin \alpha$.

Maxima für $m\lambda = d \cdot \sin \alpha$.

Blaze-Gitter: Es gilt

$$d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\lambda$$

für den Gitterabstand d und die Beugungsordnung m .

Winkel zwischen Normalen $\hat{=}$ Blaze-Winkel:

$$\theta_B = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Fresnel'sche Zonen:

$$r_z^2 = 2z\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-1}$$

für Zone Nummer z .

Brennweite einer Zonenplatte

$$f = \frac{r_z^2}{2z\lambda} = \frac{r_1^2}{2\lambda}$$

$$r_z = \sqrt{2z\lambda f}$$

Brewster-Winkel:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

Strahlungsdichte/Leuchtdichte S^* :

$$dP = S^* \cos \theta dA d\Omega$$

Strahlungsstärke J :

$$J(\Omega) = \int_A S^* \cos \theta dA$$

Lambert-Strahler:

$$J = J_0 \cos \theta$$

Kirchhoffsches Strahlungsgesetz:

$$P = \varepsilon P_S$$

Rayleigh-Jeans-Gesetz für spektrale Energiedichte:

$$w(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$$

(wie beim klassischen harmonischen Oszillator), mittlere Energie $k_B T$ pro Mode.

Integral über alle ν liefert ∞ für S^* : UV-Katastrophe.

Planck'sche Strahlungsformel:

$$w(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Idee: Mittlere Energie pro Mode ist Boltzmann-verteilt über Quantisierungszahl n .

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 0,29 \text{ cm K} = \text{const.}$$

Stefan-Boltzmann-Strahlungsgesetz:

$$P = \sigma T^4$$

Bremsspannung im Photoeffekt:

$$eU_0 = h\nu - W_A$$

$$U_0 = \frac{h}{e}\nu - U_A$$

Compton-Streuung:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

Compton-Wellenlänge:

$$\Delta\lambda_C = \frac{h}{m_0c}$$

Die Wellenlänge des Photons nimmt um $\Delta\lambda_C \cdot (1 - \cos\theta)$ zu, bei 90° um genau $\Delta\lambda_C$.
Photonenimpuls:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} = \frac{E}{c}$$

Laserbedingung:

$$\frac{N_2 - N_1}{V_{\text{Volumen}}} > \frac{8\pi\nu^2\Delta\nu\tau}{c^3t_0}$$

De-Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Bohr'sche Radien:

$$r_n = a_0 \frac{n^2}{Z}$$

Orts-Impuls-Unschärfe:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

Energie-Zeit-Unschärfe:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

Rydberg-Formel:

$$\Delta E = R_y^* \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Energien im Potentialtopf:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$$

Schrödingergleichung:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{pot}}(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) = E\Psi(\vec{r}, t)$$

Stationär:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{pot}}(\vec{r})\right)\Psi(\vec{r}, t) = E\Psi(\vec{r}, t)$$

Lösung im Wasserstoffatom:

$$\Psi(r, \varphi, \theta) = R_{n,l}(r) \cdot Y_l^m(\varphi, \theta)$$

Energien im Wasserstoffatom:

$$E_n = -R_y^* \frac{Z^2}{n^2}$$

Zeeman-Effekt:

$$\Delta E = \mu_B \cdot m \cdot g \cdot B$$

Relativistische Korrektur und Darwin-Term:

$$E_{n,l} = E_n \left[1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right) \right]$$

LS-Magnetfeld (nichtrelativistisch): $\vec{B}_l = \frac{\mu_0 Z e}{4\pi r^3 m_0} \vec{l}$.

LS-Aufspaltung: $E = E_n - \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l$

$$E = E_n + \frac{\mu_0 Z e^2}{8\pi m_0^2 r^3} (\vec{s} \cdot \vec{l})$$

$$\vec{s} \cdot \vec{l} = \frac{\hbar}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))$$

Summe aus Korrekturen und LS-Kopplung:

$$E_{n,j} = E_n \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right]$$

Hyperfeinstrukturaufspaltung:

$$\Delta E_{HFS} = \frac{A_j}{2} \cdot (F(F+1) - j(j+1) - I(I+1))$$

$$A_j = \frac{g_I \cdot \mu_K \cdot \vec{B}_j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

9.2 Konstanten

Planck'sches Wirkungsquantum: $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$

Stefan-Boltzmann-Strahlungsleistungskonstante: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$

Compton-Wellenlängen: $\lambda_{C(e)} = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$, $\lambda_{C(p/n)} = 1,32 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Elektronenmasse: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Elektronenladung: $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Serien: Lyman, Balmer, Paschen, ...

Rydberg-Konstante: $R_y^* = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$

Bohr'sches Magneton: $\mu_B = \hbar \gamma \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} = 5,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$.

Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$

Kernmagneton: $\mu_K = \frac{e}{2m_p} \hbar = \frac{\mu_B}{1836} = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{\text{J}}{\text{T}}$

Kern-G-Faktor: $g_I = 5,58$

Helium-Ionisierungsenergie: $E_{\text{He}} = -78,93 \text{ eV}$

Größenordnung der LS-Wechselwirkung und rel. Korrektur: $\pm E_n \cdot 10^{-5} = \pm 10^{-4} \text{ eV}$.

Größenordnung der Feinstruktur: $-E_n \cdot 10^{-5} = -10^{-5}$ eV

Größenordnung des Lamb-Shifts bei H: $4,4 \cdot 10^{-6}$ eV.

Größenordnung der HFS bei H: 10^{-6} eV.

10 Prüfungsprotokolle

10.1 Verschiedenes

- Wie ist das Magnetfeld einer langen Spule? $B = \mu_0 I \frac{N}{L}$.

10.2 Optik

- Wie ist die Abbildungsgleichung bei einem Teleskop?
- Welche Linsenfehler gibt es? Zeichnen und erklären. *3. Ordnung (paraxial) und 2. Ordnung (chromatisch).*
- Wie lauten die Abbildungsgleichungen an einer Linse?
- Lichtstrahlen an Linse konstruieren
- Welche Wellenlänge hat weißes Licht? *400-800 nm.*
- Wann ist die Näherung durch die Axiome der geometrischen Optik angemessen? *Wenn Beugung keine Rolle spielt und wenn Strahlen weitaus breiter sind als die Wellenlänge ist.*
- Wie ist die Abbildung bei dicken Linsen?
- Was passiert bei mehreren Linsen hintereinander?

10.3 Interferenz und Beugung

- Welche Experimente zeigen, dass das Strahlenmodell falsch ist? *Young'scher Doppelspalt, Photoeffekt, Rotverschiebung im Potential, ...*
- Welches Bild sieht man hinter einem Spalt, Doppelspalt und Gitter? *Spalt: Einzelspalt-Einhüllende. Doppelspalt: Einzelspalt-Einhüllende moduliert Interferenzmaxima. n-Spalt-Gitter: Einzelspalt-Einhüllende moduliert Interferenzmaxima, zwischen Maxima noch n-2 Nebenmaxima.*
- Welches Bild erscheint direkt hinter dem Spalt, welches weiter weg? *Direkt hinter dem Spalt und mehrere Fresnel-Zonen im Spaltbereich: Fresnel-Beugung. Weiter weg: Fraunhofer-Beugung.*
- Was ist Licht? *Strahl senkrecht auf Phasenfläche, EM-Welle, Teilchen*
- Was ist Interferenz? *Bei Licht nicht Intensitäten, sondern Amplituden addieren.*

- Wie weist man nach, dass Licht Eigenschaften einer Welle und eines Teilchenstroms hat? *Doppelspaltversuch, Photoeffekt/Compton-Versuch.*
- Zum Doppelspalt: Gibt es auch nur bei einem Spalt Interferenz? *Ja, Beugungsmuster des Spaltes.*
- Was passiert beim Gitter? Wie viele Nebenmaxima gibt es? $n - 2$.
- Photoeffekt: Welche Formel hat Einstein aufgestellt? $E_{kin} = h \cdot \nu - W_A$.
- Wie kann man damit h messen? $eU = h \cdot \nu - W_A$ über ν auftragen. Steigung ist h , Achsenabschnitt ist W_A .
- Was zeigt der Compton-Effekt, was der Photoeffekt nicht zeigt? *Impuls des Photons.*
- Warum sieht man bei normalem Licht keine Interferenz? *Kohärenzlänge im Bereich von μm .*
-

10.4 Strahler

- Was ist ein schwarzer Strahler? *Idealer strahlender und absorbierender Körper, $\varepsilon = 1$.*
- Beispiel? *Hohlraum mit Loch.*
- Was ist Strahlung? *Hat Wellen- und Teilchencharakter.*

10.5 Laser

- Welche Bestandteile hat ein Laser? *Aktives Medium, Resonator (Spiegel), Energiepumpe.*
- Was ist Besetzungsinversion?

10.6 Atome und Quantenmechanik

- Welche Atommodelle gibt es? *Kugeln, Demokrit. Rosinenkuchen, Thomson. Planeten, Rutherford, Bohr. Orbitale, Schrödinger.*
- Wie lauten die Erhaltungssätze? *Energie, Impuls, Drehimpuls.*
- Welche Quantenzahlen beschreiben den Drehimpuls? l, m .
- Welcher Drehimpuls hat mehr Information, klassisch oder quantenmechanisch? *klassisch, es sind alle 3 Komponenten bekannt. In der QM nur Richtung und Projektion auf eine Achse.*

- Warum? *Drehimpuls ist $\vec{r} \times \vec{p}$, zwischen diesen besteht aber ein Unschärferelation.*
- Wie viel Energie hat das Wasserstoffatom? $E_n = -R_y^* \frac{Z^2}{n^2}$.
- Was sind Spektrallinien? *Optische Übergänge zwischen Energieniveaus.*
- Was hat das Pauli-Prinzip mit größeren Atomen zu tun?
- Was ist der Spin des Elektrons? *Quantenmechanische Größe, besitzt magnetisches Moment, erlaubt 2 Elektronen in der innersten Schale.*
- Mit welchem Experiment bestimmt man den Spin des Elektrons? *Stern-Gerlach oder Einstein-de Haas.*
- Mit welchem Versuch wurden Ladung und Masse des Elektrons bestimmt? *Millikan-Versuch für e , Thomson'scher Parabelversuch für $\frac{e}{m}$.*
- Warum braucht man beim Millikan-Versuch die Tropfen und misst nicht direkt Spannungsdifferenzen? *Normale Spannungen und Ströme entstehen aus viel zu vielen Elementarladungen, Quantelung verschwindet.*
- Wie sind Ladung und Masse des Elektrons? $1,6 \cdot 10^{-19}C$, $9,1 \cdot 10^{-31}kg$. Versuch dazu? *Thomson-Parabel.*
- Wie funktioniert der Millikan-Versuch?
- Was sind die Bestandteile des Wasserstoffatoms? *Proton, Elektron.*
- Wie groß ist das H-Atom? *Radius = Bohrscher Radius, 1 \AA .*
- Welche Eigenschaften hat das H-Atom?
- Wie sehen Radialwahrscheinlichkeit und Orbitale aus?
- Welche Aufspaltungen der Energieniveaus gibt es, wie groß sind sie und wie weist man sie nach? *normaler Zeeman-Effekt, anomaler Zeeman-Effekt: $5,788 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{T}$, $10^{-2}nm$.*
- Wie funktioniert der Franck-Hertz-Versuch? Was bedeuten die Peaks?
- Wie sehen die Energieniveaus im Wasserstoff aus? Formel abhängig von Hauptquantenzahlen?
- Wie ist die Elektronenladung $1,6 \cdot 10^{-19}C$? Welcher Versuch? *Millikan*. Skizze und Formeln?
- Wie ist der Spin des Elektrons? Welcher Versuch weist ihn nach? *$1/2$. Stern-Gerlach. Warum Silber? Kein magnetisches Moment im einzelnen äußersten Elektron, da Grundzustand dort ein s-Zustand ist. Untere Schalen alle symmetrisch über m_s und m_l .*

- Warum ist der Spin des Kerns schwerer nachweisbar? *Gyromagnetisches Verhältnis γ viel kleiner, Masse steht im Nenner und ist 1800-fach größer.*
- Welcher Effekt hebt die Entartung der Energieniveaus auf? *l : relativistische Korrektur, m : normaler Zeeman-Effekt, s : anomaler Zeeman-Effekt, LS-Kopplung.*
- Welche Theorie erklärt die Feinstruktur? *Dirac.*
- Welche Theorie erklärt den Lamb-Shift? *QED.*
- Woraus besteht die Feinstruktur? *Aufspaltung: LS-Kopplung. Korrekturen: Relativistisch (E_{kin}), Darwin (E_{pot}).*
- Was ist die Hyperfeinstruktur? *pot. Energie durch magnetisches Kernmoment.*
- Was sind Parahelium und Orthohelium? *Para: Singulett-Zustand mit Spin 0, Ortsfunktion symmetrisch, mehr Energie. Ortho: Triplett-Zustand, Spin 1, Ortsfunktion antisymmetrisch, weniger Energie. Keine Übergänge erlaubt wegen $\Delta s = 0$*
- Was ist der Zeeman-Effekt? *Aufhebung der m_j -Entartung im Magnetfeld mit $\Delta E = g_j m_j \mu_B$. Normaler Zeeman-Effekt Sonderfall mit $j = l, s = 0$.*
- Warum klappt Stern-Gerlach nicht im homogenen Magnetfeld? *Bewirkt nur Energieverschiebung, kein Gradient.*
- In welchen Größenordnungen liegen die Aufspaltungen? *Zeeman: $5,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$. Rel. Korrektur und FS: etwa $10^{-4} \cdot E_n$ wegen $Z\alpha^2$. HFS: etwa 10^{-6} eV wegen kleinem μ_K . Lamb-Shift: 10^{-6} eV .*
- Was ist die 21-cm-Linie? *Emission durch Spin-Flip beim Wasserstoff vom Wechsel $F = 1$ nach $F = 0$. Spin-Flip sehr selten, 10^7 Jahre.*
- Ist die Feinstruktur bei schweren Elementen anders? *Feinstruktur und Lamb-Shift wachsen mit Z^4 .*
- Was unterscheidet Helium vom Wasserstoffatom? *Pauli-Verbot, Singulett-/Triplett-Zustände, Hund'sche Regel.*