

DISKRETE STRUKTUREN SS 2010  
BONUSTEST  
MUSTERLÖSUNG VON KAROLINE BUSSE

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**

**(a)**

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{i=1}^n (6i - 1) = 3n^2 + 2n$$

**Lösung**

**Induktionsanfang**

Für  $n=1$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 (6i - 1) &= 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 1 - 1 &= 3 + 2 \\ 5 &= 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Induktionsschritt** Voraussetzung: Aussage wahr für  $n$ .

Zu zeigen:  $n \Rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (6i - 1) &= \left( \sum_{i=1}^n (6i - 1) \right) + 6(n + 1) - 1 \\ &\stackrel{\text{Voraus.}}{=} 3n^2 + 2n + 6n + 5 \\ &= 3n^2 + 8n + 5 \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 \\ &= 3(n + 1)^2 + 2(n + 1) \quad \checkmark \quad \square \end{aligned}$$

**(b)**

Begründen Sie durch ein kombinatorisches Argument für  $k \geq 2$  die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2 \cdot \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$$

**Lösung****Beweis:**

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-2}{k} + 2 \cdot \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} && \text{Satz 1.7 (2)} \\
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n-2}{k} + 2 \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} && \text{mbowSatz1.7(2)} \\
\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n-2}{k} + 2 \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
\binom{n-1}{k} &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} && \text{Satz 1.7 (2)} \\
\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} && \square
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**

Wie viele gibt es?

**(a)**

Permutationen der Menge  $\underline{5} = 1, 2, 3, 4, 5$  mit genau zwei Zykeln.

**Lösung**

Die Stirling-Zahlen 1. Art  $s_{n,m}$  bezeichnen genau solche Anzahlen. Nach der Tabelle von Seite 13 des Skripts ergeben sich also  $s_{5,2} = 50$  verschiedene Permutationen.

**(b)**

Verschiedene Wörter, die aus den Buchstaben des Wortes BRENNESSEL gebildet werden können, wobei jeder Buchstabe genau so oft benutzt wird, wie er in BRENNESSEL vorkommt (Ergebnis in Dezimaldarstellung).

### Lösung

Für diesen Aufgabentyp wird der Multinomialkoeffizient benutzt (siehe auch Übungsblatt 6):

$$\begin{aligned} \binom{11}{1, 1, 3, 3, 2, 1} &= \frac{11!}{3!3!2!} \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= 11 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= 554400 \end{aligned}$$

(c)

Zugleich symmetrische und antisymmetrische Relationen auf einer  $n$ -elementigen Menge  $X$ , für  $n \in \mathbb{N}$ .

### Lösung

Zugleich symmetrisch und antisymmetrisch sind alle Relationen, die nur Einträge auf der Diagonale der Inzidenzmatrix haben. Da so ein Eintrag nur den Wert 0 oder 1 haben kann und es  $n$  Diagonalelemente gibt, folgen  $2^n$  verschiedene Belegungen.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Relation auf der Menge  $\underline{4}$ :

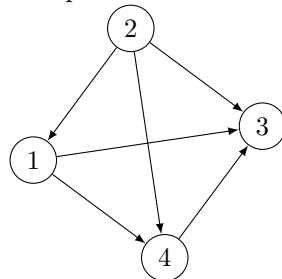
$$R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 3)\}.$$

(a)

Geben Sie die Inzidenzmatrix  $D = (d_{ij})$  der Relation  $R$  mit  $d_{ij} = 1 \Leftrightarrow iRj$  an.

### Lösung

Der Graph zu  $R$  sieht wie folgt aus:



Daraus ergibt sich die Inzidenzmatrix

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**(b)**

Bestimmen Sie die Anzahl der  $R$ -Wege von 2 nach 3.

**Lösung**

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 1 \rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 4 \rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \end{aligned}$$

Es gibt also 4  $R$ -Wege von 2 nach 3.

**(c)**

Beschreiben Sie die Produktrelation  $R^2$  durch ein Pfeildiagramm.

**Lösung**

