

DISKRETE STRUKTUREN SS 2010
BONUSTEST
MUSTERLÖSUNG VON KAROLINE BUSSE

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a)

Beweisen Sie mit einem kombinatorischen Argument für alle $n > m > 0$ die folgende Rekursion für die Stirling-Zahlen zweiter Art

$$S_{n,m} = S_{n-1,m-1} + m \cdot S_{n-1,m}.$$

Lösung

Siehe Beweis zu Satz 1.22 (2) im Skript.

(b)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n,2} = 2^{n-1} - 1.$$

Lösung

Induktionsanfang

Für $n=1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= 2^{1-1} - 1 \\ 0 &= 1 - 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsschritt Voraussetzung: Aussage wahr für n .

Zu zeigen: $n \Rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} S_{n+1,2} &\stackrel{\text{Aufg. (a)}}{=} S_{(n+1)-1,2-1} + 2 \cdot S_{(n+1)-1,2} \\ &= S_{n,1} + 2 \cdot S_{n,2} \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{=} S_{n,1} + 2 \cdot (2^{n-1} - 1) \\ &= 1 + 2 \cdot (2^{n-1} - 1) \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1 \\ &= 2^{(n+1)-1} - 1 \quad \checkmark \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a)

Bestimmen Sie die Anzahl der Summendarstellungen der Zahl 7 mittels Summanden aus \mathbb{N} unter Beachtung der Reihenfolge.

Lösung

Hier sind Zahlpartitionen gefragt. Satz 1.26 des Skriptes liefert folgende Formel für Summendarstellungen der Zahl n mittels m positiver Summanden:

$$P_{n,m}^o = \binom{n-1}{m-1}$$

Da die Summandenzahl $\in \mathbb{N}$ sein soll, müssen wir die Formel summieren:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^7 P_{7,m}^o &= \sum_{m=1}^7 \binom{7-1}{m-1} \\ &= \sum_{m=0}^6 \binom{6}{m} \\ &\stackrel{\text{Satz 1.7(3)}}{=} 2^6 \\ &= 64 \end{aligned}$$

(b)

Bestimmen Sie den Koeffizienten von $x^2y^4z^3$ in $(x+y+z)^9$. (Ergebnis in Dezimaldarstellung)

Lösung

Diese Frage kann man mit Hilfe des Multinomialkoeffizienten beantworten (Satz 1.29 (3)).

$$\begin{aligned} \binom{9}{2,4,3} &= \frac{9!}{2!4!3!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ &= 1260 \end{aligned}$$

(c)

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Relationen auf einer n -elementigen Menge X , die sowohl irreflexiv als auch antisymmetrisch sind.

Lösung

Die Inzidenzmatrix einer irreflexiven Lösung enthält nur Nullen auf der Diagonalen. Die Irreflexivität besagt, dass die Einträge $d_{i,j}$ und $d_{j,i}$ gleich belegt sein müssen. Somit bleiben nur die $(n-1)!$ Plätze der oberen (bzw. unteren)

Dreiecksmatrix ohne die Diagonale zur freien Belegung übrig. Es ergeben sich $2^{(n-1)!}$ mögliche Belegungen der Inzidenzmatrix und damit genauso viele verschiedene Relationen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Relation auf der Menge $\underline{4} = \{1, 2, 3, 4\}$:

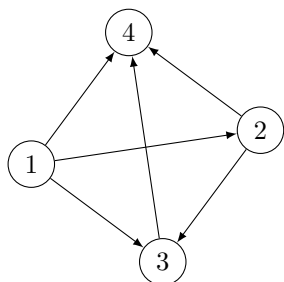
$$R = \{(x, y) | x < y\}.$$

(a)

Beschreiben Sie die Relation R und alle ihre Potenzen durch Pfeildiagramme.

Lösung

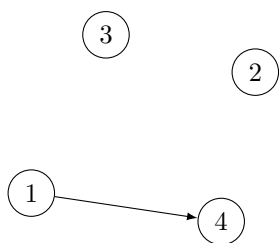
Der Graph zu R sieht wie folgt aus:



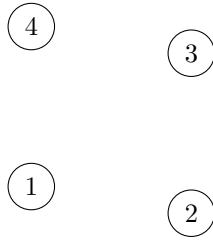
Der Graph zu R^2 sieht wie folgt aus:



Der Graph zu R^3 sieht wie folgt aus:



Der Graph zu R^k für $k \geq 4$ beschreibt die leere Relation:



(b)

Ist die Relation R (i) symmetrisch? (ii) total? (iii) azyklisch?

Lösung

Die Relation ist (i) nicht symmetrisch, da beispielsweise kein Pfeil von 3 nach 2 führt. Weiterhin ist sie (ii) nicht total, sie nicht reflexiv ist (total impliziert reflexiv). Außerdem ist die Relation (iii) azyklisch, weil sie keinen Zyklus aufweist.

(c)

Welche Äquivalenzklassen hat die reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle von R ?

Lösung

Zunächst ist nach der reflexiv-symmetrisch-transitiven Hülle von R gefragt. Reflexivität ist gegeben, wenn alle Paare (x, x) mit ein die Relationsmenge aufgenommen werden.

$$R_{\text{refl.}} = \{(x, y) | x \leq y\}$$

Symmetrie schreibt vor, dass aus xRy stets yRx folgen muss. Somit muss die Hülle wie folgt aussehen:

$$R_{\text{refl.}} + \text{symm.} = \{(x, y) | x \leq y \text{ oder } x > y\}$$

Da nun alle Kombinationen aus der Menge $\underline{4}$ enthalten sind, ist die Hülle auch transitiv.

Es ergeben sich beispielsweise die Äquivalenzklassen "kleiner", "größer" und "gleich".