Diskrete Strukturen SS 2010
Bonustest
Musterlösung von Karoline Busse

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a)

Beweisen Sie mit einem kombinatorischen Argument für alle $n > m > 0$ die folgende Rekursion für die Stirling-Zahlen erster Art

$$s_{n,m} = s_{n-1,m-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,m}$$

Lösung

Siehe Beweis zu Satz 1.15 (2) im Skript.

(b)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_{n,2} = (n-1)! \cdot (\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}),$$

wobei Sie $s_{n,1} = (n-1)!$ ohne Beweis benutzen dürfen.

Lösung

Induktionsanfang
Für n=1 ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= (1-1)! \cdot (\sum_{k=1}^{1-1} \frac{1}{k}) \\ s_{0,1} &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Insuktionsschritt Voraussetzung: Aussage wahr für n.
Zu zeigen: $n \Rightarrow n+1$

$$
\begin{aligned}
s_{n+1,2} &= s_{(n+1)-1,2-1} + ((n+1)-1)\cdot s_{(n+1)-1,2} \\
&= s_{n,1} + n\cdot s_{n,2} \\
&\overset{\text{Aufg.}}{=} (n-1)! + n\cdot s_{n,2} \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} (n-1)! + n\cdot (n-1)!(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}) \\
&= (n-1)! + n!(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}) \\
&= (n-1)! + n!(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\frac{1}{n-1}) \\
&= (n-1)! + n! + \frac{n!}{2}+\frac{n!}{2}+\dots\frac{n!}{n-1} \\
&= n! + \frac{n!}{2}+\frac{n!}{3}+\dots+\frac{n!}{n-1}+(n-1)! \\
&= n! + \frac{n!}{2}+\frac{n!}{3}+\dots+\frac{n!}{n-1}+\frac{n!}{n} \\
&= n!(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}) \\
&= n!(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) \\
&= ((n+1)-1)!(\sum_{k=1}^{(n+1)-1}\frac{1}{k} \quad \checkmark \quad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a)

Bestimmen Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen der Menge $\underline{4}$ in die Menge $\underline{7}$. (Ergebnis in Dezimaldarstellung.)

Lösung

Nach Satz 1.4 gibt es genau

$$
\begin{aligned}
(7)_4 &= 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 \\
&= 840
\end{aligned}
$$

(b)

Bestimmen Sie den Keoffizienten von $x_1^3x_2^2x_3^3x_4$ in $(x_1+x_2+x_3+x_4)^9$. (Ergebnis in Dezimaldarstellung.)

Lösung

Diese Frage kann man mit Hilfe des Multinomialkoeffizienten beantworten (Satz 1.29 (3)).

$$\begin{aligned}\binom{9}{3,2,3,1} &= \frac{9!}{3!2!3!} \\ &= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2} \\ &= 3\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 \\ &= 40\cdot 42\cdot 3 \\ &= 5040\end{aligned}$$

(c)

Bestimmen Sie die Anzahl der Relationen auf einer n-elementigen Menge X, (wobei $n \in \mathbb{N}$), die sowohl reflexiv als auch antisymmetrisch sind.

Lösung

Die Reflexivität verlangt, dass die Diagonale der Inzidenzmatrizen aller möglichen Relationen mit Einsen belegt werden muss. Nun bleiben noch $(n-1)!$ Plätze zur Verteilung übrig, beispielsweise die obere Dreiecksmatrix der Inzidenzmatrix. Durch die geforderte Antisymmetrie muss der Eintrag $d_{j,i}$ das Komplement des Eintrags $d_{i,j}$ enthalten. Somit ergeben sich $2^{(n-1)!}$ mögliche Relationen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei folgende Relation auf der Menge $\underline{4}$;

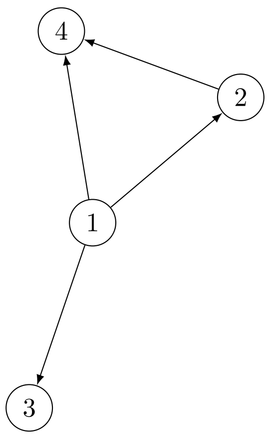
$$R = \{(x,y)|x \text{ teilt } y \text{ und } x \neq y\}.$$

(a)

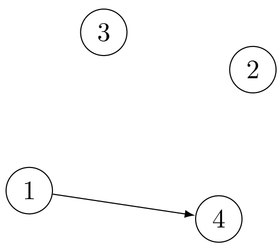
Beschreiben Sie die Relation R und alle ihre Potenzen durch Pfeildiagramme.

Lösung

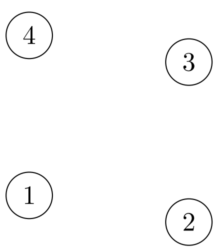
Der Graph zu R sieht wie folgt aus:



Der Graph zu R^2 sieht wie folgt aus:



Der Graph zu R^k für $k \geq 3$ beschreibt die leere Relation:



(b)

Ist die Relation R (i) antisymmetrisch? (ii) transitiv? (iii) total?

Lösung

Die Relation ist (i) antisymmetrisch, weil kein Paar (x, y) existiert für das xRy und yRx gilt. Weiterhin ist sie (ii) transitiv, da Teilbarkeitsrelationen stets transitiv sind. Außerdem ist die Relation (iii) nicht total, weil z.B. weder $3R4$ noch $4R3$ in R enthalten ist.

(c)

Bestimmen Sie die reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle von R.

Lösung

Ausgangspunkt für die gesuchte Hülle ist die Relation R. Die Hülle fordert Reflexivität, also müssen noch alle Paare (x, x) in die Relationsmenge mit aufgenommen werden. Für den ersten Schritt ergibt sich:

$$R_{\text{refl.}} = \{(x, y) | x \text{ teilt } y\}$$

Um des weiteren die Symmetrie der Hülle zu erreichen, müssen auch die Paare (x, y) hinzugenommen werden, bei denen x von Y geteilt wird:

$$R_{\text{refl.+symm.}} = \{(x, y) | x \text{ teilt } y \text{ oder } y \text{ teilt } x\}$$

Die dritte geforderte Eigenschaft der Hülle ist Transitivität. Da die Ausgangsrelation R bereits transitiv ist, ist auch die Hülle transitiv.
Somit ist die reflexiv-symmetrisch-transitive Hülle von R die Relation

$$R_{\text{Hülle}} = \{(x, y) | x \text{ teilt } y \text{ oder } y \text{ teilt } x\}$$