

DISKRETE STRUKTUREN SS 2010
BONUSTEST
MUSTERLÖSUNG VON KAROLINE BUSSE

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n (4i + 1) = 2n^2 + 3n.$$

Lösung

Induktionsanfang

Für $n=1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 (4i + 1) &= 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 1 &= 2 + 3 \\ 5 &= 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsschritt Voraussetzung: Aussage wahr für n .

Zu zeigen: $n \Rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (4i + 1) &= \left(\sum_{i=1}^n (4i + 1) \right) + 4(n + 1) + 1 \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{=} 2n^2 + 3n + 4n + 4 + 1 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 \\ &= 2(n + 1)^2 + 3(n + 1) \checkmark \quad \square \end{aligned}$$

(b)

Begründen Sie durch ein kombinatorisches Argument die Identität

$$2 \cdot \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

$$\begin{aligned}2 \cdot \binom{2n-1}{n} &= \binom{2n}{n} \quad \text{Satz 1.7 (2)} \\2 \cdot \binom{2n-1}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \\ \binom{2n-1}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} \\ \binom{2n-1}{2n-1-n} &= \binom{2n-1}{n-1} \\ \binom{2n-1}{n-1} &= \binom{2n-1}{n-1} \quad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wie viele gibt es?

(a)

Partitionen der Menge $\underline{5} = 1, 2, 3, 4, 5$ in genau drei Blöcke.

Lösung

Die Stirling-Zahlen 2. Art $S_{n,m}$ bezeichnen genau solche Anzahlen. Nach der Tabelle von Seite 18 des Skripts ergeben sich also $S_{5,3} = 25$ verschiedene Partitionen.

(b)

Verschiedene Wörter, die aus den Buchstaben des Wortes MESSSTELLE gebildet werden können, wobei jeder Buchstabe genau so oft benutzt wird, wie er in MESSSTELLE vorkommt (Ergebnis in Dezimaldarstellung).

Lösung

Für diesen Aufgabentyp wird der Multinomialkoeffizient benutzt (siehe auch Übungsblatt 6):

$$\begin{aligned}\binom{10}{1, 3, 3, 1, 2} &= \frac{10!}{3!3!2!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= 50400\end{aligned}$$

(c)

Zugleich antisymmetrische und totale Relationen auf einer n -elementigen Menge X , für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

Die Inzidenzmatrix muss auf der Diagonalen Einsen enthalten, damit die Relation total werden kann. Jedes a_{ij} oder (logisches oder!) a_{ji} muss auch gefüllt werden (wegen der Eigenschaft total). Durch die Antisymmetrie darf aber nur a_{ij} xor a_{ji} mit Eins belegt sein. Insgesamt muss die Matrix also $n!$ Einsen enthalten. Da die Diagonale fest ist, bleiben $(n-1)!$ Einsen zur Auswahl möglich, daraus ergeben sich $2^{(n-1)!}$ verschiedene Relationen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Relation auf der Menge $\underline{4}$:

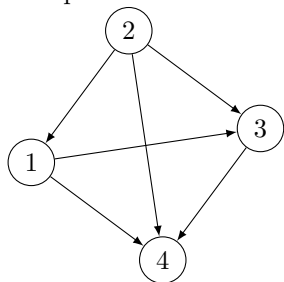
$$R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

(a)

Geben Sie die Inzidenzmatrix $D = (d_{ij})$ der Relation R mit $d_{ij} = 1 \Leftrightarrow iRj$ an.

Lösung

Der Graph zu R sieht wie folgt aus:



Daraus ergibt sich die Inzidenzmatrix

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

Bestimmen Sie die Anzahl der R -Wege von 2 nach 4.

Lösung

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow 4 \\ 2 &\rightarrow 1 \rightarrow 4 \\ 2 &\rightarrow 3 \rightarrow 4 \\ 2 &\rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \end{aligned}$$

Es gibt also 4 R -Wege von 2 nach 4.

(c)

Beschreiben Sie die Produktrelation R^2 durch ein Pfeildiagramm.

Lösung

