

DISKRETE STRUKTUREN SS 2010
BONUSTEST 1
MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n (6i - 1) = 3n^2 + 2n$$

Induktionsanfang

Für $n=1$ ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^1 (6i - 1) = 6 - 1 = 5 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt

Voraussetzung: Die Aussage sei wahr für n . Zu zeigen: Sie gilt auch für $n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (6i - 1) &= \left(\sum_{i=1}^n (6i - 1) \right) + 6(n + 1) - 1 \\ &\stackrel{\text{Voraus.}}{=} 3n^2 + 2n + 6n + 5 \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 \\ &= 3(n + 1)^2 + 2(n + 1) \quad \checkmark \quad \square \end{aligned}$$

(b) Begründen Sie durch ein kombinatorisches Argument für $k \geq 2$ die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2 \cdot \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$$

Beweis durch kombinatorisches Argument:

Bei zwei festgehaltenen Elementen von \underline{n} gibt es

- $\binom{n-2}{k-2}$ k -elementige Teilmengen von \underline{n} , die beide Elemente enthalten
- $2\binom{n-2}{k-1}$ k -elementige Teilmengen von \underline{n} , die eines von beiden enthalten
- $\binom{n-2}{k}$ k -elementige Teilmengen von \underline{n} , die keines von beiden enthalten.

Beweis alternativ mit Satz 1.7(2):

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \left(\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \right) + \left(\binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \right) \\ &= \binom{n-2}{k} + 2 \cdot \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}. \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wie viele gibt es?

- (a) Permutationen der Menge $\underline{5} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit genau zwei Zykeln.

Lösung

Die Stirling-Zahlen 1. Art $s_{n,m}$ bezeichnen genau solche Anzahlen. Nach der Tabelle von Seite 13 des Skripts ergeben sich also $s_{5,2} = 50$ verschiedene Permutationen. Explizit hat man $\binom{5}{1} \cdot 6 = 30$ Permutationen mit einem Einer- und einem Viererzykel, sowie $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ Permutationen mit einem Zweier- und einem Dreierzykel.

- (b) Verschiedene Wörter, die aus den Buchstaben des Wortes BRENNESSEL gebildet werden können, wobei jeder Buchstabe genau so oft benutzt wird, wie er in BRENNESSEL vorkommt (Ergebnis in Dezimaldarstellung).

Lösung

Für diesen Aufgabentyp wird der Multinomialkoeffizient benutzt (siehe auch Übungsblatt 6):

$$\begin{aligned} \binom{11}{1, 1, 3, 3, 2, 1} &= \frac{11!}{3!3!2!} \\ &= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= 11 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \\ &= 554400 \end{aligned}$$

- (c) Zugleich symmetrische und antisymmetrische Relationen auf einer n -elementigen Menge X , für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

Zugleich symmetrisch und antisymmetrisch sind genau diejenigen Relationen, die nur Einträge auf der Diagonale der Inzidenzmatrix haben. Da so ein Eintrag nur den Wert 0 oder 1 haben kann und es n Diagonalelemente gibt, hat man 2^n verschiedene Belegungen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

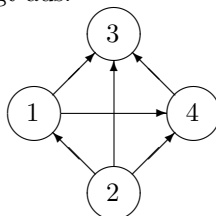
Gegeben sei die folgende Relation auf der Menge $\underline{4}$:

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 3)\}.$$

(a) Geben Sie die Inzidenzmatrix $D = (d_{ij})$ der Relation R mit $d_{ij} = 1 \Leftrightarrow i R j$ an.

Lösung

Der Graph zu R sieht wie folgt aus:



Daraus ergibt sich die Inzidenzmatrix (wir notieren für (b) und (c) auch ihre Potenzen):

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (n \geq 4).$$

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der R -Wege von 2 nach 3.

Lösung

Es gibt folgende vier R -Wege von 2 nach 3 (siehe die Koeffizienten d_{23} in den Matrizen D^n):

$$2 \rightarrow 3, \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3, \quad 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3.$$

(c) Beschreiben Sie die Produktrelation R^2 durch ein Pfeildiagramm.

Lösung

Durch Ablesen aus dem Pfeildiagramm von R oder der Matrix D^2 :

